# THEORETISCHE UND EXPERIMENTELLE STRÖMUNGSUNTERSUCHUNGEN IN UMLENKKANÄLEN VON TURBOMASCHINEN

DOKTORARBEIT

zur Erlangung des Grades Doktor-Ingenieur
der Abteilung für Maschinenbau
der Ruhr-Universität Bochum

von
**Günter Zahn**
Essen-Kettwig

Bochum 1982

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547222_0027

# THEORETISCHE UND EXPERIMENTELLE STRÖMUNGSUNTERSUCHUNGEN IN UMLENKKANÄLEN VON TURBOMASCHINEN

DOKTORARBEIT

zur Erlangung des Grades Doktor-Ingenieur
der Abteilung für Maschinenbau
der Ruhr-Universität Bochum

von
**Günter Zahn**
Essen-Kettwig

Bochum 1982

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Doktorarbeit eingereicht am 20. Januar 1982
Tag der mündlichen Prüfung: 10. März 1982

Referent: Prof. Dr.-Ing. W. Fister
Korreferent: Prof. Dr.-Ing. K. Gersten

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Assistent am Lehrstuhl für Fluidenergiemaschinen im Institut für Energietechnik der Ruhr-Universität Bochum.

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen Mitarbeitern des Lehrstuhls bedanken, die durch ihre freundliche und hilfreiche Unterstützung zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Besonders danken möchte ich Herrn Prof. Dr.-Ing. W. FISTER, dem Geschäftsführenden Direktor des Instituts für Energietechnik und Ordinarius des Lehrstuhls für Fluidenergiemaschinen. Er hat diese Untersuchungen angeregt und deren Durchführung durch großzügige Förderung ermöglicht. Durch ihn habe ich zahlreiche,wertvolle Hinweise erhalten, die zum Gelingen dieser Arbeit geführt haben.

Mein Dank gilt ebenfalls Herrn Prof. Dr.-Ing. K. GERSTEN, dem Geschäftsführenden Direktor des Instituts für Thermo- und Fluiddynamik und Ordinarius des Lehrstuhls für Strömungsmechanik, für die bereitwillige Übernahme des Korreferates.

Bochum, März 1982

Günther Zahn

Inhaltsübersicht

1. Einleitung

2. Bisherige Arbeiten

3. Theoretische Ableitung des Rechenverfahrens

3.1. Ableitung der verwendeten Grundgleichungen aus den Navier-Stokes'schen Bewegungsgleichungen

3.2. Linearisierung und Entkopplung der Impulsgleichungen

3.3. Diskretisierung der Gleichungen

3.3.1. Anwendung eines versetzten Gitters

3.3.2. Diskretisierung der Kontinuitätsgleichung

3.3.3. Diskretisierung der Impulsgleichungen

3.4. Ableitung der Druckkorrekturgleichung

3.5. Änderungen bei nicht äquidistantem Gitter

3.6. Festlegung der Kontrollräume am Rand des Lösungsgebietes

3.7. Randbedingungen

3.8. Turbulenzmodell

4. Implementierung des Verfahrens

4.1. Behandlung der auftretenden linearen Gleichungssysteme

4.1.1. Struktur der Gleichungssysteme

4.1.2. Auswahl des Verfahrens zur Lösung der Gleichungssysteme

4.1.2.1. Direkte Verfahren

4.1.2.2. Indirekte Verfahren

4.1.3. Benötigte Genauigkeit des SOR-Lösungsverfahrens

4.2. Behandlung der Geometrie

4.3. Ablaufschema des Rechenprogramms

5. Vergleich mit exakten Lösungen der Navier-Stokes-Gleichungen

5.1. Der Potentialwirbel

5.2. Die Couette-Strömung

5.3. Die Drallströmung in einem unbeschaufelten, parallelwandigen Plattendiffusor

6. Aufbau des Umlenkkanal-Versuchsstandes und angewandte Meßtechnik

6.1. Mechanischer Aufbau des Versuchsstandes

6.2. Beschreibung der angewandten Meßtechnik (Laser-2-Focus-Verfahren)

7. Darstellung von Rechen- und Meßergebnissen

7.1. Vergleich von Rechen- und Meßergebnissen

7.1.1. Drallfreie Strömung

7.1.2. Drallbehaftete Strömung

7.2. Rechenergebnisse für weitere Fälle

7.3. Verlustbeiwerte

8. Zusammenfassung

Anhang

A1. Transformation der Navier-Stokes-Bewegungsgleichungen in $(r,\psi,\varphi,)$ - Toruskoordinaten

A2. Form der numerischen Gleichungen bei Annahme eines linearen Verlaufes der Funktionen zwischen den Stützstellen

A3. Vollständige Darstellung der Differenzengleichungen des numerischen Verfahrens

A4. Zwei weitere Beispiele zur Krümmerströmung

A4.1. Nachrechnung der Versuche von Detra

A4.2. Die Entwicklung von Sekundärwirbeln in einem Krümmer mit quadratischem Querschnitt

Verwendete Formelzeichen

Lateinische Buchstaben

| | |
|---|---|
| $A$ | Fläche, Querschnitt |
| $\underline{A}$, $\underline{AP}$ | rechteckige Matrix |
| $B$ | Koeffizienten der Differenzengleichung zur Bestimmung der Druckkorrekturen |
| $b$ | Kanalbreite |
| $b$ | Bandbreite einer Matrix |
| $c$ | Konstante |
| $\vec{c}$ | Vektor der Geschwindigkeitskomponenten einer Querströmungsebene |
| $\vec{c}'$ | Vektor der Geschwindigkeitskorrekturen einer Querströmungsebene |
| $\vec{c}^{*}$ | Vektor der korrigierten Geschwindigkeiten |
| $\vec{F}$ | Vektorfeld (mit den Komponenten $F_1$, $F_2$ und $F_3$) |
| $\vec{G}$ | Vektorfeld (mit den Komponenten $G_1$, $G_2$ und $G_3$) |
| $K$ | Koeffizienten der Differenzengleichungen |
| $\dot{m}$ | Massenstrom |
| $n$ | Zahl der Unbekannten eines Gleichungssystems |
| $\vec{n}$ | Normalenvektor |
| $p$ | statischer Druck |
| $p'$ | Druckkorrektur |
| $r$ | Radius (Koordinate) |
| $R$ | Radius (Körperabmessung, Konstante) |
| $Re_{Git}$ | mit Gitterabmessungen gebildete Reynoldszahl |
| $\underline{T}$ | quadratische Matrix eines Gleichungssystems |
| $t_1$ | Schaufelteilung |

| | |
|---|---|
| $u, v, w$ | Geschwindigkeitskomponenten im kartesischen System |
| $\dot{V}$ | Volumenstrom |
| $V$ | Volumen |
| $\Delta\dot{V}$ | Fehler in der Volumenstrombilanz für einen Kontrollraum (entspricht aufgrund des inkompressiblen Strömungsmediums dem Fehler der entsprechenden Massenstrombilanz) |
| $w_r, w_\psi, w_\varphi$ | Geschwindigkeitskomponenten in Toruskoordinaten |
| $x, y, z$ | kartesische Koordinaten |
| $Z_n$ | Zahl der Punktoperationen zur Lösung eines Gleichungssystems mit n Unbekannten |

Griechische Buchstaben

| | |
|---|---|
| $\alpha$ | Strömungswinkel |
| $\delta_A$ | Flächenverhältniszahl |
| $\varepsilon$ | Genauigkeitsschschranke, numerischer Fehler |
| $\psi, \varphi$ | Winkelkoordinaten |
| $\nu$ | kinematische Viskosität |
| $\rho$ | Dichte |
| $\zeta$ | Verlustbeiwert |

Indizes

| | |
|---|---|
| A | am Kanalaustritt |
| au | außen |
| E | am Kanaleintritt |
| eff | effektiv |
| i,j | Zählindizes des numerischen Gitters in den Querrichtungen |
| k | Zählindex des numerischen Gitters in Durchflußrichtung |
| KR | einen Kontrollraum betreffend |
| lam | laminar |
| l,m,n | Summenzähler |
| PD | Plattendiffusor |
| t | totale Größe |
| u | die u-Richtung betreffend |
| v | die v-Richtung betreffend |
| w | die w-Richtung betreffend |

Die Bedeutung weiterer, spezieller Indizes geht aus dem Text hervor.

## 1. Einleitung

In vielen Bereichen bilden Strömungsmaschinen heute wichtige Komponenten von Industrieanlagen. Bedingt durch die Weiterentwicklung der einzelnen technischen Verfahren werden ständig wachsende Anforderungen an diese Aggregate gestellt.

Der Wunsch nach höheren Druckverhältnissen pro Stufe und nach größeren Massendurchsätzen besteht dabei neben der Forderung nach absoluter Betriebssicherheit, großem Betriebsbereich und möglichst hohem Maschinenwirkungsgrad.

Da mit den erhöhten Anforderungen auch die strömungstechnischen, konstruktiven und technologischen Probleme steigen, ist zur Ergänzung der Gesamtkonzeption einer Maschine in immer höherem Maße die gezielte experimentelle und theoretische Erforschung der Einzelkomponenten erforderlich. Um diese Einzelkomponenten besser gestalten zu können, müssen zunächst genaue Kenntnisse über den Strömungsverlauf in diesen Bauteilen vorliegen.

In Bild 1.1 ist ein mehrstufiger Radialverdichter dargestellt. Die Baukomponenten einer Stufe dieses Verdichters zeigt Bild 1.2. Nach dem Laufrad (I) folgt der Diffusor (II) und die 180°- Umlenkung (III), die das mit Restdrall austretende Fluid möglichst verlustarm von einer radial auswärts in eine radial einwärts gerichtete Strömung umlenken soll. Während sich viele Arbeiten auf die Laufradströmung konzentrieren, hat die 180°- Umlenkung bisher wenig Beachtung gefunden. Da deshalb die für eine strömungstechnische Auslegung geeigneten Unterlagen fehlen, erfolgt die Gestaltung dieses Ringraumes im allge-

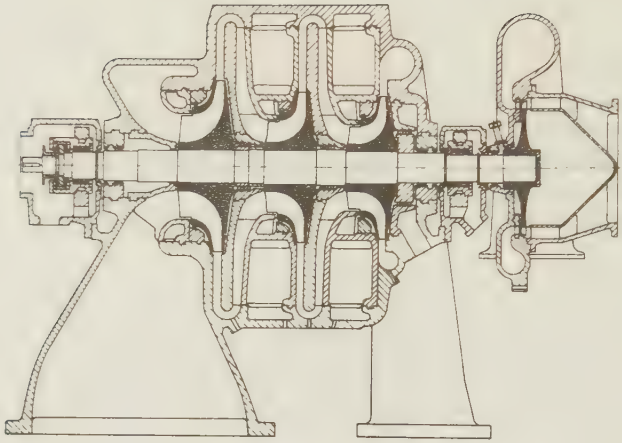


Bild 1.1: Schnitt durch einen dreistufigen ungekühlten Radialverdichter

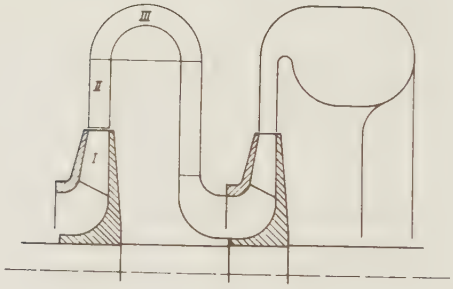



Bild 1.2: Komponenten einer Radialverdichterstufe

meinen nach konstruktiven Gesichtspunkten. Das Bauteil wird möglichst auf kleinem Raum angeordnet, um den Außendurchmesser, die axiale Baulänge und damit den Lagerabstand der Maschine klein zu halten.

Da jedoch die Vorgänge in der Umlenkung die Zuströmung zur folgenden Komponente und damit deren Funktion stark beeinflussen, ist die Kenntnis der Strömung in der Umlenkung von großem Interesse für die Beurteilung des Betriebsverhaltens der gesamten Maschine. Für den Ingenieur ist es daher wichtig, ein Rechenverfahren zur Verfügung zu haben, das diese Strömung so realistisch und detailliert beschreibt, daß bereits in der Auslegungsphase Aussagen über das Maschinenverhalten möglich sind.

In dieser Arbeit ist deshalb ein mathematisches Modell der Strömung durch einen gekrümmten Ringraum entwickelt worden, das mit Hilfe eines Computers die Berechnung der Strömung erlaubt.

Ebenso wie bei Radialverdichtern und -pumpen tritt die Durchströmung gekrümmter Hohlräume bei hydrodynamischen Drehmomentwandlern auf (Bild 1.3). Nach dem

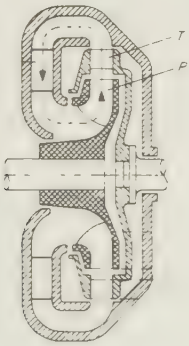



Bild 1.3: Schnitt durch einen einphasigen hydrodynamischen Wandler

Austrittsquerschnitt der Turbine folgt ein gekrümmter Kanal, der das Fluid der Pumpe zuführt. Da hydrodynamische Wandler häufig in Fahrzeugen eingesetzt werden, ist hier in hohem Maße das Verhalten in vom Auslegungspunkt abweichenden Betriebszuständen von Bedeutung. Wichtig ist dabei die Kenntnis des Geschwindigkeitsprofils am Austritt des Kanals in Abhängigkeit vom Betriebspunkt. Da die Wandlerströmung in letzter Zeit zunehmend detailliert untersucht wird /65,66/, stellt die Berechnung der Strömung in einer Komponente des Wandlerkreislaufes eine weitere wichtige Anwendung des Rechenmodells dar.

## 2. Bisherige Arbeiten

Zur Berechnung der Durchströmung gekrümmter Kanäle sind bisher recht unterschiedliche Versuche unternommen worden. In /1/ wird gezeigt, daß die Strömung durch einen solchen Kanal nicht mit potentialtheoretischen Ansätzen zu erfassen ist. Aufgrund der bei diesen Ansätzen angenommenen Gleichenergieverteilung in der Strömung ist ein Gebiet hohen Druckes immer durch niedrige Geschwindigkeiten gekennzeichnet, so daß sich das Geschwindigkeitsmaximum im Gebiet niedrigen Druckes an der Innenseite des Kanals ergibt (Bild 2.1, links). In Wirklichkeit werden aber sowohl das Geschwindigkeits- als auch das Druckmaximum an der Außenseite einer Krümmung gemessen (Bild 2.1, rechts), was nur bei einer nicht isoenergetischen Strömung möglich ist.

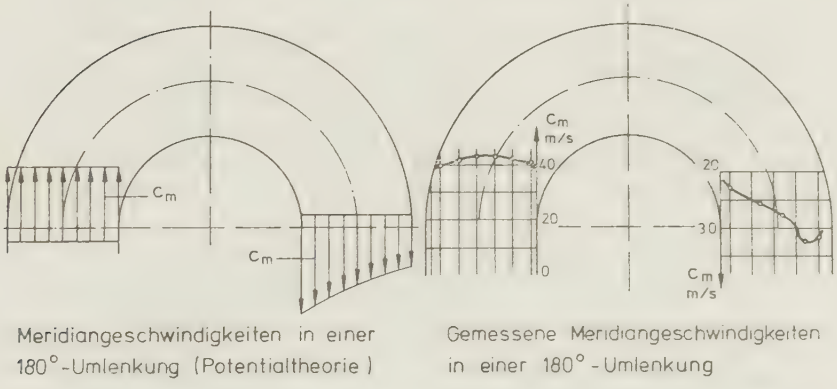



Bild 2.1: Strömung in einem gekrümmten Kanal (nach /1/)

Entscheidend für die Verschiebung des Geschwindigkeits-

maximums an die Außenseite der Krümmung sind Sekundärströmungen, also Geschwindigkeitskomponenten senkrecht zur Meridiangeschwindigkeit. Diese Querströmungen entstehen durch Druckgradienten senkrecht zur Durchströmungsrichtung und beeinflussen das Geschwindigkeitsprofil, insbesondere bei starker Krümmung des Kanals /2,6/.

Detra /6/ vereinfachte 1953 die Eulerschen Bewegungsgleichungen mit Hilfe von bestimmten Voraussetzungen (im Vergleich zur Durchströmungsgeschwindigkeit kleine Sekundärgeschwindigkeiten und sehr schwache Krümmung des Kanals) und löste diese Gleichungen näherungsweise durch getrennte Potenzreihenansätze für Haupt- und Sekundärströmung. Ihm gelang damit die Berechnung des Geschwindigkeitsprofils am Austritt eines 21°- Krümmers. Stärkere Umlenkungen sind allerdings mit diesem Verfahren nicht zu beschreiben.

Gruber /1/ erweiterte diesen Ansatz für die Berechnung der Durchströmung einer 180°- Umlenkung im Rückführkanal eines Radialverdichters. Er macht dabei ähnliche Voraussetzungen wie Detra und muß ein kleines Verhältnis von Kanalbreite zum Krümmungsradius fordern. Auch seine Rechnungen vernachlässigen die Viskositätsterme.

Sowohl die Methode von Detra als auch die von Gruber sind für eine genaue Strömungsanalyse noch mit zu weitgehenden Einschränkungen behaftet. Allerdings werden einige Eigenschaften der Krümmerströmung qualitativ richtig wiedergegeben.

Da die Methoden von Detra und Gruber vom Ansatz her nicht zu verallgemeinern sind, weil die vereinfachenden Voraussetzungen nicht aufgegeben werden können, geht der Weg zu einer detaillierteren Beschreibung der Strömungsvor-

gänge zu den Differenzen- bzw. Finite-Elemente-Verfahren.

Im Gegensatz zu den Methoden, die von Potenzreihenansätzen ausgehen, werden hierbei alle auftretenden Funktionen, die in Wirklichkeit kontinuierlich sind, durch diskrete Funktionen ersetzt, die nur an bestimmten Punkten eines Gitters definiert sind. Jede einzelne Funktion wird nicht mehr analytisch, sondern durch eine Menge einzelner Funktionswerte dargestellt. Dadurch benötigen solche Verfahren eine hohe Computerkapazität, und die begrenzte Größe gegenwärtiger Rechner ist ein Hindernis für die Anwendung dreidimensionaler Differenzenverfahren. Aus diesem Grunde ist versucht worden, die räumliche Beschreibung bestimmter Strömungsfälle durch ebene Betrachtungen anzunähern.

So hat Schulz /7/ die Rückführpartie eines Radialverdichters mit einem ebenen Differenzenverfahren unter Berücksichtigung der Reibungsterme untersucht. Dabei hat er in der dritten Dimension, der Umfangsrichtung der Maschine, die Bedingung der Rotationssymmetrie $\partial / \partial \varphi = 0$ benutzt, wobei $\varphi$ die Winkelkoordinate in dieser Richtung ist. Durch die ebene Behandlung geht allerdings der Einfluß der Sekundärströmungen verloren.

Trotz Beschränkung auf das ebene Problem hat Schulz' Modell hohen Rechenzeitbedarf (zwei bis siebzehn Stunden auf einer CYBER 174/CDC 6600).

Um den räumlichen Charakter einer Strömung zu beschreiben, ist auch die sogenannte Quasi-3D-Rechnung angewendet worden, die eine volle 3D-Betrachtung durch eine Verknüpfung von 2D-Rechnungen ersetzt. Die Strömungen auf Flächen erster und zweiter Art, die senkrecht aufeinander stehen, werden dabei getrennt voneinander zweidimensional berechnet und durch eine Iteration in Überein-

stimmung gebracht. Dieser Ansatz, zuerst von Wu /54/ beschrieben, ist häufig auf die Durchströmung von Turbomaschinen angewendet worden. Dabei wurde die Lösung auf den Stromflächen mit Differenzenverfahren /55,56,58/ oder auch mit der Finite-Elemente-Methode /57/ bestimmt. Nachteil dieser Methoden ist, daß Sekundärströmungen senkrecht zu den jeweiligen Stromflächen nicht berücksichtigt werden können. Strömungen stark dreidimensionalen Charakters werden von diesen Methoden deshalb nur unzureichend beschrieben.

Ein von diesen Verfahren prinzipiell verschiedener Weg, um eine 3D-Rechnung durch eine Folge von 2D-Rechnungen zu ersetzen, ist von Patankar und Spalding /4/ und später von Roberts und Forester /29,31/ beschritten worden. Dieser Ansatz geht davon aus, daß eine Kanaldurchströmung in praktischen Fällen häufig eine Hauptströmungsrichtung besitzt. Die Komponente der Strömungsgeschwindigkeit in dieser durch die Wahl des Koordinatensystems festgelegten Richtung wird als an jedem Ort positiv vorausgesetzt. Bei der Betrachtung von Strömungsmaschinen wird dazu zweckmäßigerweise die Meridianrichtung gewählt. Eine solche Strömung erlaubt eine schrittweise Berechnung in der gewählten Richtung. Ausgehend von dem Geschwindigkeitsprofil am Eintritt eines dreidimensionalen Kanals können so die Strömungseigenschaften entlang der Meridiankoordinate durch schrittweise Berechnung auf Querströmungsflächen bestimmt werden. Bei der Ableitung dieses Verfahrens zeigt sich jedoch, daß die stromaufwärts gerichtete Wirkung von weiter stromabwärts auf die Strömung einwirkenden Ereignissen (Querschnittsänderungen, Krümmungen) vernachlässigt werden muß. Ein stromabwärts infolge eines Hindernisses auftretender Druckaufstau wird nämlich erst dann von der Rechnung erreicht, wenn die Ergebnisse stromaufwärts be-

reits festliegen. Eine stromaufwärts gerichtete Druckwirkung, wie sie in jeder realistischen Unterschallströmung auftritt, ist deshalb mit einer solchen Rechnung nicht nachzuvollziehen. Die Anwendbarkeit dieses Verfahrens beschränkt sich daher auf Strömungen möglichst vollständig parabolischen Charakters, in denen keine stromaufwärts gerichteten Einflüsse auftreten.

Eine Krümmung erzeugt aber einen Querdruckgradienten, der sich in Durchflußrichtung nach stromaufwärts eventuell bis vor die Krümmung auswirkt und dessen Einfluß bei starken Krümmungen nicht mehr vernachlässigt werden kann /2,3,29,41/. Deshalb bleibt ein Verfahren, in dem der Kanal nur einmal schrittweise durchlaufen wird, auf Kanäle mit geringen Querschnittsänderungen und mit schwacher Krümmung beschränkt.

Zur Lösung dieses Problems versuchten Briley /27/ und Ghia /37/, beide auf ähnliche Weise, eine solche parabolische Rechnung mit einer Potentialrechnung zu verbinden. Dabei liegt die Annahme zugrunde, daß die in alle Richtungen wirkende, durch eine Krümmung oder eine Querschnittsänderung entstandene Druckverteilung durch eine einfache reibungs- und drehungsfreie Potentialrechnung bestimmt werden kann. Die Potentiallösung trägt der elliptischen Druckwirkung Rechnung; sie läßt Druckeinflüsse auch entgegen der Durchflußrichtung wirken. Diese so bestimmte Druckverteilung wird dann Grundlage der schrittweisen Durchrechnung des Lösungsgebietes.

Die Verwendung einer reibungs- und drehungsfreien Potentiallösung als Grundlage der Strömungsberechnung stellt eine Näherung dar, die von Pratap et. al. /3/ aufgegeben wurde. In seinem Ansatz, den er als „partiell-parabolisch" bezeichnet, wird der Druck, um einen in alle Richtungen wirkenden Druckeinfluß nachrechnen zu können, nicht mehr

nur jeweils auf einer Querströmungsebene, sondern auf allen Punkten des dreidimensionalen Gitternetzes gleichzeitig gespeichert und in der Rechnung berücksichtigt. Eine dreidimensionale Druckverteilung ist somit ständig im Rechner vorhanden und wird durch wiederholte, schrittweise Durchrechnung des betrachteten Lösungsgebietes solange verändert, bis die Bewegungsgleichungen und die Kontinuitätsgleichung gleichermaßen erfüllt sind.

Durch die dreidimensionale Speicherung des Druckes und die wiederholte Durchrechnung des Lösungsgebietes steigt der Rechenaufwand im Vergleich zu den rein parabolischen Ansätzen; eine Druckwirkung kann aber nun nach stromaufwärts weitergegeben werden.

Für die gleiche Klasse von Strömungen hat Moore /49,50/ ein Verfahren entwickelt, das sich nur in Einzelheiten von der Methode Prataps unterscheidet. Auch Moore speichert den Druck dreidimensional und bestimmt die Geschwindigkeiten mit Hilfe einer schrittweisen Durchrechnung des Lösungsgebietes. Im Gegensatz zu Pratap beginnt er seine Rechnung aber zunächst mit einem reibungsfreien Ansatz, um dann erst in einem späteren Schritt die Reibungsterme hinzuzunehmen. Moore benutzt die Methode außerdem zur Berechnung der Strömung durch Schaufelgitter /51/.

Bei den zuletzt beschriebenen „partiell-parabolischen" Verfahren besteht der Unterschied zu einer voll elliptischen, dreidimensionalen Strömungsrechnung nur noch in der Beschränkung auf Strömungen, in denen die Geschwindigkeits-Komponente in der gewählten Durchflußrichtung stets positiv ist. Der Rechenaufwand ist aber wesentlich geringer: alle Variablen bis auf den Druck sind zweidimensional gespeichert und alle Rechnungen werden zweidimensional auf Querströmungsebenen durchgeführt.

Erst mit diesen Ansätzen ist eine Klasse von Verfahren erreicht, die eine sinnvolle Anwendung auf die im Rahmen dieser Arbeit betrachteten Turbomaschinenkanäle ermöglichen. Diese Kanäle müssen nämlich als so stark gekrümmt angesehen werden, daß hier ebenfalls die Druckrückwirkung aufgrund der Krümmung nicht mehr vernachlässigbar ist. In /42/ untersucht Pratap eine $90^{\circ}$- Umlenkung, bei der das Verhältnis der Breite des Kanals zum Krümmungsradius als ein Maß für die Stärke der Krümmung mit 0,48 angegeben wird. Diese Untersuchung ergibt, daß ein rein parabolischer Ansatz (er benutzte dabei die Methode nach /41/) die Strömung in diesem Krümmer nicht mehr genau genug beschreiben kann, da der durch die Krümmung entstehende Druckgradient quer zur Strömungsrichtung sich stromaufwärts bis vor den Krümmungsbeginn bemerkbar macht. Das Verhältnis von Kanalbreite zum Krümmungsradius nimmt in den betrachteten Turbomaschinenkanälen durchaus noch höhere Werte als bei diesem Krümmer an, da die Umlenkung auf kleinstem Raum stattfinden soll.

Auch Roberts und Forester weisen in /29/ auf die Notwendigkeit des partiell-parabolischen Ansatzes hin. An einem Krümmer, der ebenfalls noch nicht die Krümmungsstärke von Turbomaschinenkanälen erreicht, entdecken sie ähnliche Effekte wie Pratap und geben als zukünftiges Entwicklungsziel die Erweiterung ihres bis dahin rein parabolischen Verfahrens an, um der elliptischen Druckwirkung Rechnung zu tragen.

Aus den oben angeführten Gründen folgt auch der in dieser Arbeit beschriebene Ansatz dem Grundgedanken von Pratap und Moore, die dreidimensionale, elliptische Behandlung des Druckes mit einer wiederholten schrittweisen Durchrechnung des Lösungsgebietes zu kombinieren. Für den Fall

der besonderen Geometrie und der speziellen Randbedingungen der betrachteten Turbomaschinenkanäle ist daher ein partiell-parabolisches Modell entwickelt worden.

Die Bedingung, daß die Meridiangeschwindigkeit an keiner Stelle negativ werden darf, scheint dabei nicht gravierend zu sein, da ablösende Strömung durch günstige Strömungsführung möglichst vermieden werden soll.

Als weitere Voraussetzung soll für das hier vorgestellte Rechenmodell angenommen werden, daß die Dichte des betrachteten Fluids konstant ist. Diese Voraussetzung ist bei Radialpumpen und hydrodynamischen Wandlern aufgrund des inkompressiblen Strömungsmediums sicher gerechtfertigt. Bei Verdichtern ist die Vernachlässigung der Kompressibilität nach Schlichting /8/ immer dann noch zulässig, wenn die Strömungsgeschwindigkeiten unterhalb von 30% der örtlichen Schallgeschwindigkeit liegen.
Dieser Wert wird in Rückführkanälen von Radialverdichtern üblicherweise nicht überschritten.

Außerdem liegt in den betrachteten Umlenkkanälen im allgemeinen der turbulente Strömungstyp vor. Die für diesen Strömungstyp charakteristischen instationären Querbewegungen der Fluidteilchen transportieren die Bewegungsenergie auch in den Grenzschichtbereich, so daß Geschwindigkeitsprofile mit dünnen Grenzschichten entstehen. Die mathematische Behandlung der Turbulenz ist bisher nicht in allgemeingültiger Form und nur unter Zuhilfenahme empirischer Daten möglich /64/. Da sich die turbulenten Schwankungsbewegungen der Fluidteilchen in Größenordnungen weit unter denen des betrachteten Strömungskanals abspielen, gehen Turbulenzeffekte in numerischen Gittern, die nicht extrem engmaschig sind, verloren. Nach einer Abschätzung von Rodi /2/

ist die Größe der kleinsten Turbulenzelemente typisch $10^{-3}$ mal der Größe des Strömungskanals. Zur Auflösung dieser Turbulenzbewegungen müssen numerische Gitter mehr als $10^{9}$ Gitterpunkte besitzen. Da dies unrealistisch ist, werden mit Hilfe von zeitlich gemittelten Gleichungen Turbulenzterme in die Reibungsglieder der Bewegungsgleichungen eingeführt, die in Zusammenhang mit einem halb-empirischen Turbulenzmodell in die Berechnung eingehen /8/. Auch in dieser Arbeit wurde die Rechnung durch Einführung eines Turbulenzmodells an den turbulenten Charakter der Strömung angepaßt.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß zur Beschreibung der Strömungsvorgänge, wie sie in Rückführkanälen von Radialmaschinen und hydrodynamischen Wandlern vorliegen, ein Modell sinnvoll ist, das

- den dreidimensionalen Charakter der Strömung berücksichtigt, aber durch die Voraussetzung überall positiver Durchflußgeschwindigkeit die benötigte Rechnerkapazität verringert
- das Strömungsmedium als inkompressibel betrachtet
- die Turbulenz der Strömung und damit die Reibungsterme nicht vernachlässigt.

Eine zusätzliche Anforderung an das Modell besteht darin, daß die Geometrie der berechenbaren Kanäle recht variabel sein soll und den in der Praxis verwendeten Formen entspricht. Außerdem soll die Behandlung der Geometrie übersichtlich und einfach sein, wobei eine Entlastung des Benutzers durch den Computer bei der Generierung des erforderlichen Gitternetzes erwünscht ist. Weiterhin sollen

Plotprozeduren zur Verfügung stehen, die eine automatische Zeichnungsausgabe und damit eine Kontrolle der eingegebenen Geometrie der räumlich gekrümmten Hohlräume erlauben.

## 3. Theoretische Ableitung des Rechenverfahrens

Die partiellen Differentialgleichungen, die die betrachtete Strömung in allgemeiner Form beschreiben, sind die Navier-Stokes'schen Bewegungsgleichungen, die im dreidimensionalen Fall aus drei Impulsgleichungen und der Kontinuitätsgleichung bestehen. Aus diesen Differentialgleichungen sollen die Beziehungen abgeleitet werden, die in dem hier vorgestellten Verfahren Verwendung finden.

### 3.1. Ableitung der verwendeten Grundgleichungen aus den Navier-Stokes'schen Bewegungsgleichungen

Die Ableitung soll der einfacheren Übersicht halber in kartesischen Koordinaten x, y und z erfolgen, obwohl die betrachtete Geometrie später in Toruskoordinaten dargestellt wird. Die Transformation der Gleichungen auf die Gleichungen in Toruskoordinaten ist ausführlich in /1/ und im Anhang A1 dieser Arbeit beschrieben.

Ausgegangen wird also von den Bewegungsgleichungen für die stationäre, inkompressible, reibungsbehaftete Strömung eines Newton'schen Fluids:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \cdot \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] \qquad (1a)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \cdot \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] \qquad (1b)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \cdot \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] \qquad (1c)$$

Dabei stellen u, v und w die Geschwindigkeitskomponenten in x-, y- und z-Richtung dar. $\rho$ ist die Dichte des Fluids, $\nu$ die kinematische Zähigkeit.

Als vierte Gleichung wird die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad (2)$$

benötigt. Diese Gleichungen werden in drei Schritten auf die später verwendete Form umgestellt. Die Umformungen werden nur an der Gleichung für die x-Richtung dargestellt; die beiden anderen Komponenten werden analog behandelt.

Zunächst wird die Kontinuitätsgleichung mit u multipliziert:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial y} + u \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Dieser Ausdruck wird zu der Impulsgleichung für die x-Richtung addiert:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + u \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial y} + u \frac{\partial w}{\partial z} =$$

$$= - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \cdot \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right]$$

Nach Anwendung der Produktregel lassen sich die Terme zusammenfassen:

$$\frac{\partial (u^2)}{\partial x} + \frac{\partial (uv)}{\partial y} + \frac{\partial (uw)}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \cdot \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right]$$

Für die v- und die w-Komponente ergibt sich nach analogen Umformungen:

$$\frac{\partial (uv)}{\partial x} + \frac{\partial (v^2)}{\partial y} + \frac{\partial (vw)}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \cdot \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right]$$

$$\frac{\partial (uw)}{\partial x} + \frac{\partial (wv)}{\partial y} + \frac{\partial (w^2)}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \cdot \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right]$$

Der folgende Schritt, in dem der vom Koordinatensystem unabhängige Divergenz-Operator eingeführt wird, ist eine Vorbereitung auf die spätere Anwendung des Gauss'schen Integralsatzes. Obwohl dieser Schritt bei der Formulierung der Gleichungen in kartesischen Koordinaten zu keiner deutlichen Vereinfachung führt, ist die Einführung dieses Operators

bei der Verwendung anderer Koordinatensysteme jedoch für eine korrekte und einheitliche Anwendung des Gauss'schen Satzes notwendig.

Für die Divergenz eines Vektorfeldes

$$\vec{F} = \{F_1(x,y,z),\ F_2(x,y,z),\ F_3(x,y,z)\}$$

gilt in kartesischen Koordinaten:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \qquad (3)$$

Für das Vektorfeld

$$\vec{F} = (u^2,\ uv,\ uw)$$

ergibt sich

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial (u^2)}{\partial x} + \frac{\partial (uv)}{\partial y} + \frac{\partial (uw)}{\partial z} \quad ,$$

also die linke Seite der ersten Impulsgleichung.

Die Divergenz des Vektorfeldes

$$\vec{G} = \{\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial z}\}$$

ist

$$\operatorname{div} \vec{G} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad .$$

Dies entspricht den Reibungstermen der Impulsgleichung. Damit läßt sich die Bewegungsgleichung in x-Richtung schreiben als:

$$\text{div}\ (u^2,\ uv,\ uw) = -\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\cdot\text{div}\ \left(\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

Analog für die beiden anderen Richtungen durchgeführt ergibt sich nach diesem Schritt insgesamt folgende Schreibweise der Bewegungsgleichungen:

$$\text{div}\ (u^2,\ uv,\ uw) = -\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\cdot\text{div}\ \left(\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial z}\right) \qquad (4a)$$

$$\text{div}\ (uv,\ v^2,\ vw) = -\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\cdot\text{div}\ \left(\frac{\partial v}{\partial x},\ \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial v}{\partial z}\right) \qquad (4b)$$

$$\text{div}\ (uw,\ vw,\ w^2) = -\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\cdot\text{div}\ \left(\frac{\partial w}{\partial x},\ \frac{\partial w}{\partial y},\ \frac{\partial w}{\partial z}\right) \qquad (4c)$$

Für die Kontinuitätsgleichung folgt die Form:

$$\text{div}\ (u,\ v,\ w) = 0 \qquad (4d)$$

Mit Hilfe des Gauss'schen Integralsatzes werden die Gleichungen nun über einen (zunächst beliebigen) Kontrollraum V integriert. In einem späteren Schritt wird das gesamte Lösungsgebiet dann in kleine Kontrollräume unterteilt, für die jeweils diese Integration durchgeführt wird.

Für einen beliebigen Kontrollraum V ergibt die Integration am Beispiel der Gleichung (4a):

$$\iiint_V \operatorname{div}(u^2, uv, uw)\cdot dV = \tag{5}$$

$$= -\frac{1}{\rho}\iiint_V \frac{\partial p}{\partial x}\,dV + \nu\iiint_V \operatorname{div}\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) dV$$

Dabei wurden die Größen $\rho$ und $\nu$ als konstant in dem betrachteten Kontrollraum vorausgesetzt.

Der Gauss'sche Integralsatz setzt ein räumliches Integral über die Divergenz eines Vektorfeldes in Beziehung zu einem Oberflächenintegral über die begrenzenden Oberflächen des betrachteten Raumes. Nach /10/ lautet er in vom Koordinatensystem unabhängiger Form:

$$\iiint_V \operatorname{div}\vec{F}\,dV = \iint_A \vec{F}\cdot d\vec{A} = \iint_A \vec{F}\cdot\vec{n}\,dA \tag{6}$$

Dabei ist $\vec{F}$ ein beliebiges Vektorfeld, A ist die begrenzende Fläche des Integrationsgebietes, in diesem Falle also die Oberfläche des Kontrollraumes. $\vec{n}$ ist der zugehörige Normalenvektor.

Mit Hilfe der Integrationsvorschrift (6) lassen sich alle räumlichen Integrale aus (5) in Oberflächenintegrale umwandeln. Zur besseren Anschaulichkeit sei hier noch die Form des Satzes (6) angegeben, die er speziell in kartesischen Koordinaten annimmt /12/:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) dV =$$

$$= \iint_A F_1\,dy\,dz + F_2\,dx\,dz + F_3\,dx\,dy$$

Angewendet auf Gleichung (5) ergibt sich unter der Voraussetzung, daß der Kontrollraum von Koordinatenflächen, bei kartesischen Koordinaten also von aufeinander senkrecht stehenden Ebenen mit x = const, y = const oder z = const begrenzt wird, folgende Form:

$$\iint_A u^2 dy\,dz + \iint_A uv\,dx\,dz + \iint_A uw\,dx\,dy = -\frac{1}{\rho}\iint_A p\,dy\,dz + \nu\left[\iint_A \frac{\partial u}{\partial x}\,dy\,dz + \iint_A \frac{\partial u}{\partial y}\,dx\,dz + \iint_A \frac{\partial u}{\partial z}\,dx\,dy\right] \tag{7a}$$

Die Gleichungen (4b) und (4c) für die beiden anderen Komponenten und die Kontinuitätsgleichung (4d) lauten nach entsprechender Behandlung:

$$\iint_A uv\,dy\,dz + \iint_A v^2\,dx\,dz + \iint_A vw\,dx\,dy = -\frac{1}{\rho}\iint_A p\,dx\,dz + \nu\left[\iint_A \frac{\partial v}{\partial x}\,dy\,dz + \iint_A \frac{\partial v}{\partial y}\,dx\,dz + \iint_A \frac{\partial v}{\partial z}\,dx\,dy\right] \tag{7b}$$

$$\iint_A uw\,dy\,dz + \iint_A vw\,dx\,dz + \iint_A w^2\,dx\,dy = -\frac{1}{\rho}\iint_A p\,dx\,dy + \nu\left[\iint_A \frac{\partial w}{\partial x}\,dy\,dz + \iint_A \frac{\partial w}{\partial y}\,dx\,dz + \iint_A \frac{\partial w}{\partial z}\,dx\,dy\right] \tag{7c}$$

$$\iint_A u\,dy\,dz + \iint_A v\,dx\,dz + \iint_A w\,dx\,dy = 0 \tag{7d}$$

Diese Schreibweise der Bewegungsgleichungen, deren Terme nur noch Integrale über die Oberfläche eines von Koordinatenflächen begrenzten Kontrollraumes darstellen, bildet die Grundlage für das zu beschreibende Rechenverfahren.

Trifft man Annahmen über den Verlauf der Funktionen $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$, $w(x,y,z)$ und $p(x,y,z)$ auf der Oberfläche des Kontrollraumes, so lassen sich die Integrale der Gleichungen (7) berechnen. Diese später erläuterten Annahmen führen zu algebraischen Beziehungen zwischen u,v,w und p, die die ursprünglichen Gleichungen nur angenähert wiedergeben, während die Integralgleichungen (7) exakt gelten.

## 3.2. Linearisierung und Entkopplung der Impulsgleichungen

Wird das betrachtete dreidimensionale Lösungsgebiet in einzelne Kontrollräume zerlegt, so lassen sich die Gleichungen (7) für jeden dieser Kontrollräume aufstellen. Dies führt zu einem System von gekoppelten, nichtlinearen Integralgleichungen. Um bei den späteren Umformungen lineare Gleichungssysteme zu erhalten, müssen die Gleichungen zuvor jedoch linearisiert werden. Dies betrifft lediglich die Konvektionsterme, also die linken Seiten der Impulsgleichungen.

Wie bereits erwähnt, soll die Lösung schrittweise in der Durchflußrichtung erfolgen. Dies bedeutet, daß mit Hilfe der Bewegungsgleichungen die Bestimmung der Strömungsgrößen u,v,w und p auf einer Querströmungsebene mit dem Index k möglich ist, wenn diese Größen für eine stromaufwärts benachbart gelegene Ebene k-1 bereits bekannt sind (Bild 3.1).

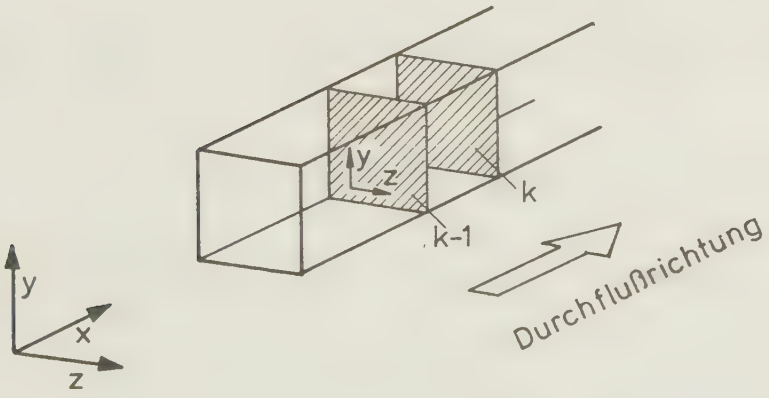



Bild 3.1: Querströmungsebenen k und k-1

Ausgehend von einem vorgegeben Geschwindigkeitsprofil am Eintritt des Kanals ist auf diese Weise die Berechnung der Strömungsgrößen auf allen Ebenen k möglich.

Eine Linearisierung der nichtlinearen Konvektionsglieder ist dadurch möglich, daß bestimmte Terme dieser Glieder von der jeweils stromaufwärts benachbarten Querströmungsebene k-1 übernommen werden. Diese Terme werden wie folgt gewählt:

$$\iint_A u\cdot u^{k-1}\,dy\,dz + \iint_A u\cdot v^{k-1}\,dx\,dz + \iint_A u\cdot w^{k-1}\,dx\,dy = \tag{8a}$$

$$= -\frac{1}{\rho}\cdot\iint_A p\cdot dy\,dz + \nu\cdot\left[\iint_A \frac{\partial u}{\partial x}\,dy\,dz + \iint_A \frac{\partial u}{\partial y}\,dx\,dz + \iint_A \frac{\partial u}{\partial z}\,dx\,dy\right]$$

$$\iint_A v\cdot u^{k-1}\,dy\,dz + \iint_A v\cdot v^{k-1}\,dx\,dz + \iint_A v\cdot w^{k-1}\,dx\,dy = \tag{8b}$$

$$= -\frac{1}{\rho}\cdot\iint_A p\cdot dx\,dz + \nu\cdot\left[\iint_A \frac{\partial v}{\partial x}\,dy\,dz + \iint_A \frac{\partial v}{\partial y}\,dx\,dz + \iint_A \frac{\partial v}{\partial z}\,dx\,dy\right]$$

$$\iint_A w\cdot u^{k-1}\,dy\,dz + \iint_A w\cdot v^{k-1}\,dx\,dz + \iint_A w\cdot w^{k-1}\,dx\,dy = \tag{8c}$$

$$= -\frac{1}{\rho}\cdot\iint_A p\cdot dx\,dy + \nu\cdot\left[\iint_A \frac{\partial w}{\partial x}\,dy\,dz + \iint_A \frac{\partial w}{\partial y}\,dx\,dz + \iint_A \frac{\partial w}{\partial z}\,dx\,dy\right]$$

Darin sind die Größen mit dem Index k-1 von der stromaufwärts benachbarten Querströmungsebene genommen und damit bei der Aufstellung der Gleichungen für die Ebene k als bekannt anzusehen. Zwischen den Unbekannten auf der Ebene k

gelten nun lineare Beziehungen.

Der durch die Linearisierung gemachte Fehler hängt ab von der Veränderung der Strömungsgrößen zwischen der Ebene k-1 und der Ebene k und damit von der Schrittweite in Durchflußrichtung. Ist diese Schrittweite klein, so hat sich die Strömung auf dem kurzen Stück kaum verändert und es gilt:

$$\begin{aligned} u^{k-1} &\approx u^{k} \\ v^{k-1} &\approx v^{k} \\ w^{k-1} &\approx w^{k}. \end{aligned}$$

Auch wenn sich die Strömung in Durchflußrichtung sehr schnell entwickelt, ist durch die Wahl einer entsprechend kleinen Schrittweite der Fehler immer beliebig klein zu halten.

Durch die beschriebene Linearisierung ist gleichzeitig eine Entkopplung der Konvektionsglieder der Impulsgleichungen erfolgt. Während bisher die drei Geschwindigkeitskomponenten jeweils alle in den Impulsgleichungen als Unbekannte erschienen sind, ist nun in jeder Gleichung nur noch eine Geschwindigkeitskomponente unbekannt. Eine gemeinsame Kopplung liegt lediglich noch über den Druck p vor.

Eine vollständige Entkopplung der Gleichungen bietet die Möglichkeit , jede der Gleichungen einzeln zu lösen. Die unabhängige Lösung der drei Gleichungen ist dabei in bezug auf die benötigte Rechnerkapazität von Vorteil, da Speicherplatz und Rechenzeit zur Lösung eines linearen Gleichungssystems überproportional mit der Anzahl der Unbekannten steigen /11/ und es daher günstiger ist, mehrere kleine an Stelle eines großen Systems zu lösen.

Deshalb wird zu Beginn der Rechnung eine Druckverteilung im gesamten Kanal geschätzt, also als bekannt angenommen.

Die Druckterme in den Gleichungen werden dann aus dieser Druckverteilung bestimmt. Nach jedem Schritt der Rechnung kann über einen in Abschnitt 3.4 beschriebenen Algorithmus die Druckverteilung verbessert werden, so daß sich eine Iteration ergibt, die mit dem Erreichen der endgültigen Druckverteilung beendet ist. Diese iterative, mehrmalige Durchrechnung des gesamten Kanals ist, wie bereits erwähnt, aufgrund der nicht vernachlässigbaren gegenseitigen Wechselwirkung zwischen weiter stromabwärts und weiter stromaufwärts vorliegenden Strömungsverhältnissen sowieso erforderlich. Die erste Druckschätzung braucht keine besonderen Kriterien zu erfüllen; bei nahezu allen im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Rechnungen wurde der Druck im ganzen Lösungsgebiet zu Beginn der Rechnung gleich dem Umgebungsdruck gesetzt.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß sich durch das Einführen einer Durchflußrichtung mit grundsätzlich positiver Geschwindigkeitskomponente, die Linearisierung der Impulsgleichungen und die iterative Bestimmung der Druckverteilung insgesamt folgende Rechenvorteile ergeben:

- die Geschwindigkeitskomponenten u,v und w brauchen nur zweidimensional abgespeichert werden
- das Lösen von sehr großen Gleichungssystemen, wie sie bei simultaner Lösung der Bewegungsgleichungen vorliegen, wird durch das wesentlich rechengünstigere Lösen von mehreren kleinen Gleichungssystemen ersetzt.

## 3.3. Diskretisierung der Gleichungen

In diesem Abschnitt soll der Schritt von dem System von linearisierten Integralgleichungen (8) zu den verwendeten algebraischen Gleichungen beschrieben werden. Dabei werden weiterhin kartesische Koordinaten benutzt und die x-Richtung soll, ohne daß dies eine Einschränkung der Allgemeinheit darstellt, als Durchflußrichtung angesehen werden.

### 3.3.1. Anwendung eines versetzten Gitters

Innerhalb des räumlichen Lösungsgebietes werden die kontinuierlichen Ortsfunktionen u,v,w und p zunächst durch diskrete Funktionen ersetzt, die nur auf bestimmten Gitterpunkten definiert sind.

Da diese Stützstellen der vier unbekannten Funktionen nicht gleich sein müssen, werden sie für alle vier Funktionen unterschiedlich gewählt, um eine günstigere Form der algebraischen Gleichungen zu erhalten. Dies zeigt Bild 3.2, in dem ein Teil eines räumlichen Gitters, dessen Gitterlinien entsprechend den Koordinatenrichtungen verlaufen, dargestellt ist. Als Zählindizes der Gitterpunkte werden k, j und i für x-, y- bzw. z-Richtung benutzt. Der Druck p ist an den Kreuzungspunkten des Gitters definiert, die Geschwindigkeitskomponenten an den entsprechenden Mittelpunkten der Strecken zwischen den Knoten. Aus dem Bild geht auch die Indizierung der Stützstellen der Größen u, v, w und p hervor: zu einem Knoten mit dem dreidimensionalen Index (i,j,k) gehört der auf ihm definierte Druckwert $p_{i,j,k}$, die Komponenten $v_{i,j,k}$ und $w_{i,j,k}$ sind jeweils in Koordi-

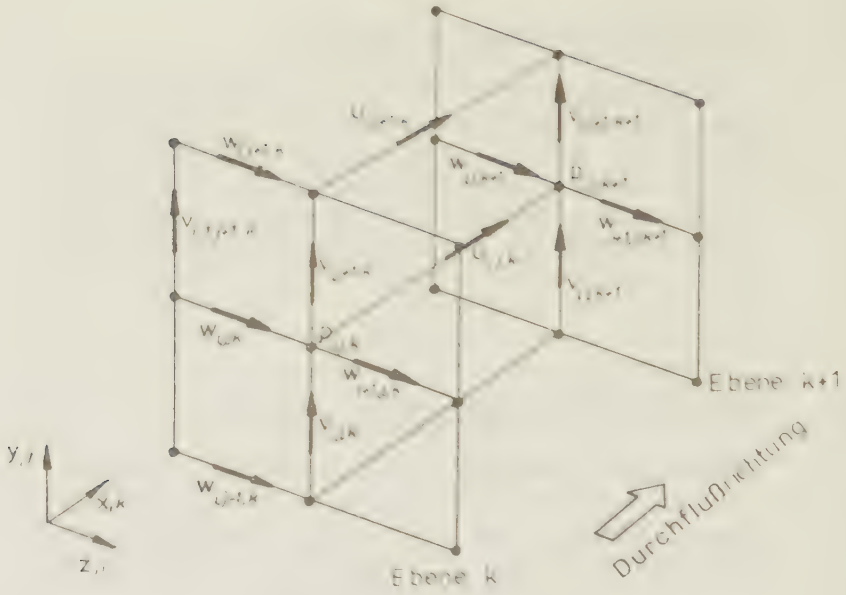



Bild 3.2: Versetztes Gitter

natenrichtung von dem Knoten, die Komponente $u_{i-1,j,k}$ in Durchflußrichtung ist hinter dem Knoten definiert. Diese Wahl der Stützstellen erleichtert die Diskretisierung, wie am Beispiel der Kontinuitätsgleichung gezeigt werden soll.

### 3.3.2. Diskretisierung der Kontinuitätsgleichung

Die Kontinuitätsgleichung wird jeweils über einen Kontrollraum integriert, der einen Gitterkreuzungspunkt umschließt und in dessen Berandungsflächen jeweils die Stützstelle einer Geschwindigkeitskomponente liegt (Bild 3.3).

Außerdem müssen die Begrenzungsflächen Koordinatenflächen des verwendeten Systems sein, da die Anwendung des Gauss'-schen Satzes in der in Abschnitt 3.1. verwendeten Form diese Voraussetzung verlangt. Mit diesen Bedingungen ist die Form des Kontrollraumes im kartesischen System als Quader festgelegt.

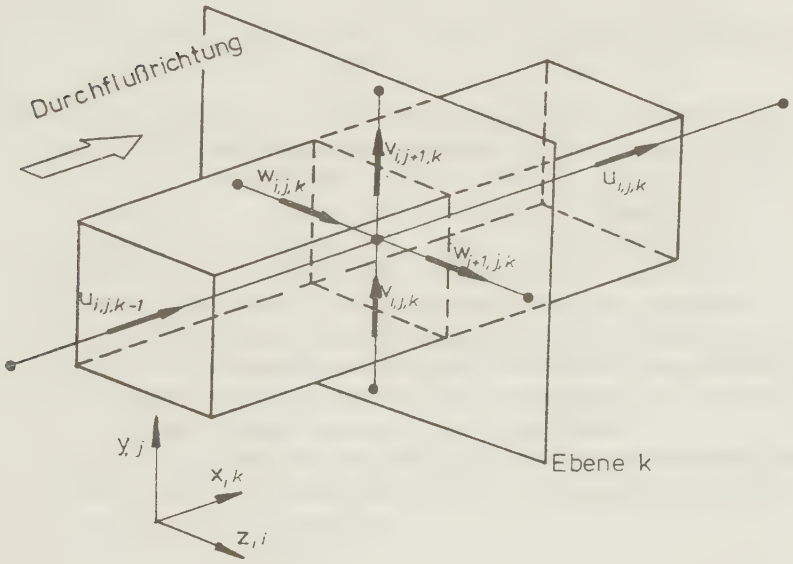



Bild 3.3: Kontrollraum zur Integration der Kontinuitätsgleichung

Die Gesamtheit solcher Kontrollräume bildet das vollständige Lösungsgebiet. Die zu den Oberflächen des Kontrollraumes jeweils normalen Geschwindigkeitskomponenten sind nun an zur Auswertung der Integrale günstigen Stellen definiert. Unter

der Annahme, daß auf einer Begrenzungsfläche des Kontrollraumes die zugehörige Normalgeschwindigkeit konstant ist, ergibt die Berechnung der Integrale von Gleichung (7d) folgende algebraische Form der Kontinuitätsgleichung für einen Kontrollraum:

$$\Delta y \cdot \Delta z \cdot u_{i,j,k} - \Delta y \cdot \Delta z \cdot u_{i,j,k-1} + \Delta x \cdot \Delta z \cdot v_{i,j+1,k} - \Delta x \cdot \Delta z \cdot v_{i,j,k} + \Delta x \cdot \Delta y \cdot w_{i+1,j,k} - \Delta x \cdot \Delta y \cdot w_{i,j,k} = 0 \qquad (9)$$

Die Ausführung der Integrationen liefert also die an jeder Fläche jeweils ein- bzw. austretenden Volumenströme. $\Delta x$, $\Delta y$ und $\Delta z$ stellen die Abmessungen des Kontrollraumes in x-, y- und z-Richtung dar.

Die algebraische Form der Kontinuitätsgleichung stellt damit eine Beziehung dar, die anschaulich einer Massenbilanz für den betrachteten Kontrollraum entspricht. Stellt man die entsprechenden Gleichungen für alle derartigen Kontrollräume des Lösungsgebietes auf, so ergibt sich ein System von linearen, algebraischen Gleichungen (das allerdings mehr Unbekannte als Gleichungen enthält und daher nur im Zusammenhang mit den Impulsgleichungen eindeutig lösbar ist).

### 3.3.3. Diskretisierung der Impulsgleichungen

Die Annäherung der Impulsgleichungen durch algebraische Beziehungen erfolgt entsprechend der Vorgehensweise bei der Kontinuitätsgleichung. Zur Diskretisierung jeder der drei Gleichungen wird das Lösungsgebiet jeweils in kleine Kontrollräume eingeteilt. Die Integrationen in den Gleichungen (8)

werden wieder mit Hilfe von Annahmen über den Funktionsverlauf auf der Oberfläche eines Kontrollraumes ausgeführt. Am Beispiel der zweiten Impulsgleichung aus System (8) für die v-Komponente der Strömung

$$\text{(8b)}\quad \iint_A v\cdot u^{k-1}\cdot dy\cdot dz + \iint_A v\cdot v^{k-1}\cdot dx\cdot dz + \iint_A v\cdot w^{k-1}\cdot dx\cdot dy =$$
$$= -\frac{1}{\rho}\iint_A p\cdot dx\cdot dz + \nu\left[\iint_A \frac{\partial v}{\partial x}\cdot dy\cdot dz + \iint_A \frac{\partial v}{\partial y}\cdot dx\cdot dz + \iint_A \frac{\partial v}{\partial z}\cdot dx\cdot dy\right]$$

soll dieser Vorgang dargestellt werden. Für die beiden anderen Gleichungen erfolgt der Ablauf analog.

Zunächst wird die Einteilung des gesamten Lösungsgebietes in einzelne Kontrollräume für jede der Impulsgleichungen so vorgenommen, daß ein Kontrollraum eine Stützstelle der jeweils betrachteten Variablen umschließt. Ein Kontrollraum zur Integration der v-Gleichung umschließt also jeweils die Stützstelle einer v-Komponente. Die begrenzenden Oberflächen sind wieder Koordinatenflächen, in denen jeweils der Mittelpunkt der Verbindungslinie zwischen zwei entsprechenden v-Stützstellen liegt. Ein solcher Kontrollraum ist in Bild 3.4 im oberen Teil räumlich und im unteren Teil in zwei Ansichten dargestellt.

Es soll an dieser Stelle nochmals darauf hingewiesen werden, daß diese Darstellung nur aus Gründen der Übersichtlichkeit in kartesischen Koordinaten erfolgt; auch in beliebigen anderen Koordinaten sind diese Vorgänge vollkommen analog darstellbar. Außerdem ist im Folgenden aus denselben Gründen eine in x-, y- und z-Richtung jeweils konstante Gitterweite vorausgesetzt. Die Veränderung der Gleichungen für ein nicht äquidistantes Gitter wird in Abschnitt 3.5 behandelt.

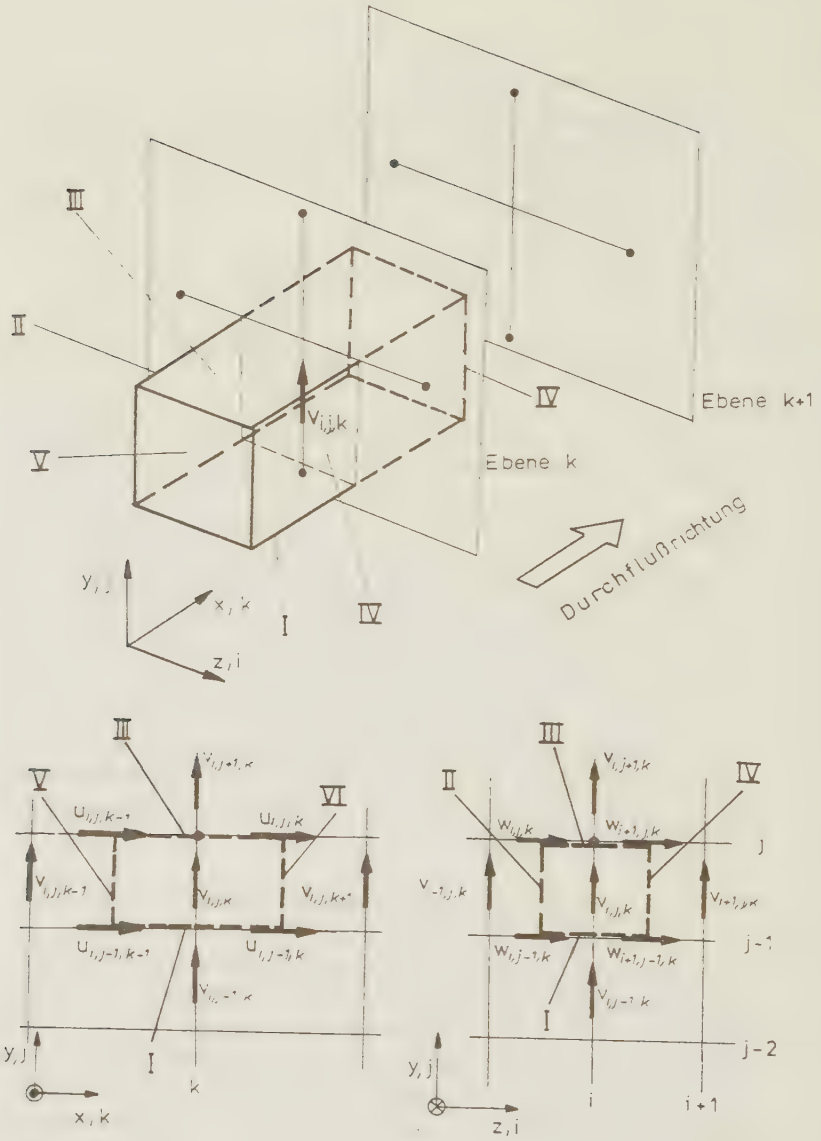



Bild 3.4: Kontrollraum zur Integration der v-Gleichung

Für eine beliebige Stützstelle mit dem Funktionswert $v_{i,j,k}$, umgeben von dem entsprechenden Kontrollraum, sollen die einzelnen Terme der v-Gleichung nun aufgestellt werden.

Die erste getroffene Annahme ist wie bei der Behandlung der Kontinuitätsgleichung, daß eine Funktion auf einer Begrenzungsfläche des Kontrollraumes konstant ist. Dadurch wird die Berechnung der Oberflächenintegrale trivial. Legt man die Numerierung der sechs Begrenzungsflächen des Kontrollraumes nach Bild 3.4 zugrunde, so ergibt die Integration der Gleichung (8b) für die v-Komponente:

$$
\begin{aligned}
&\Delta y\cdot\Delta z\cdot\left[(u^{k-1}\cdot v)\Big|_{\text{Fläche VI}} - (u^{k-1}\cdot v)\Big|_{\text{Fläche II}}\right] + \\
&+\ \Delta x\cdot\Delta z\cdot\left[(v^{k-1}\cdot v)\Big|_{\text{Fläche III}} - (v^{k-1}\cdot v)\Big|_{\text{Fläche I}}\right] + \\
&+\ \Delta x\cdot\Delta y\cdot\left[(w^{k-1}\cdot v)\Big|_{\text{Fläche IV}} - (w^{k-1}\cdot v)\Big|_{\text{Fläche II}}\right] = \\
&= -\frac{\Delta x\cdot\Delta z}{\rho}\left[p\Big|_{\text{Fläche III}} - p\Big|_{\text{Fläche I}}\right] + \\
&+\ \left[\nu\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{\text{Fläche VI}} - \nu\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{\text{Fläche V}}\right]\Delta y\cdot\Delta z + \\
&+\ \left[\nu\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\Big|_{\text{Fläche III}} - \nu\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\Big|_{\text{Fläche I}}\right]\Delta x\cdot\Delta z + \\
&+\ \left[\nu\cdot\frac{\partial v}{\partial z}\Big|_{\text{Fläche IV}} - \nu\cdot\frac{\partial v}{\partial z}\Big|_{\text{Fläche II}}\right]\Delta x\cdot\Delta y
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Dies ist eine lineare algebraische Beziehung zwischen den auf den Begrenzungsflächen des Kontrollraumes jeweils konstanten Funktionswerten.

Im Falle der Kontinuitätsgleichung ist der Mittelpunkt jeder

Begrenzungsfläche des dort verwendeten Kontrollraumes gleichzeitig Stützstelle der auf dieser Begrenzungsfläche benötigten Größe. Dies ist bei den Impulsgleichungen nicht immer der Fall. Der auf einer Begrenzungsfläche benötigte Funktionswert muß daher noch mit Hilfe der Werte an den Stützstellen dieser Funktion ausgedrückt werden. So kann z.B. der Wert von v auf der Fläche IV (Bild 3.4) mit Hilfe der Werte $v_{i,j,k}$ und $v_{i+1,j,k}$ beschrieben werden. Dazu ist die Annahme eines Verlaufes der Funktion v zwischen diesen Werten erforderlich.

Die naheliegende Annahme eines linearen Funktionsverlaufs zwischen den Stützstellen, die ersten Rechnungen zugrunde gelegt worden war, führte zu einem teilweise instabilen Verhalten des Rechenverfahrens. Um zu einem in allen Fällen stabilen Algorithmus zu kommen, ist der Verlauf als von der zu berechnenden Geschwindigkeitsverteilung abhängig angenommen worden. Der Verlauf der Funktionen zwischen den Stützstellen folgt dabei einer Exponentialfunktion, die einen freien Parameter enthält, dessen Wert die Form der Funktion beeinflußt.

Eine Darstellung der Schwierigkeiten, die sich bei Annahme eines linearen Verlaufs zwischen den Stützstellen ergeben, ist im Anhang A2 erfolgt. Dort wird außerdem eine Begründung für die Annahme des Exponentialverlaufs gegeben.

Bild 3.5, das die Querströmungsebene k in einer perspektivischen Ansicht darstellt, zeigt am Beispiel des Verlaufs der Funktion v zwischen den Stützstellen $v_{i-1,j,k}$ und $v_{i,j,k}$ mehrere mögliche Formen der gewählten Exponentialfunktion. Der Verlauf zwischen diesen Stützstellen wird zur Bestimmung des v-Wertes auf der Fläche II benötigt. Analytisch wird der Verlauf durch die Gleichung

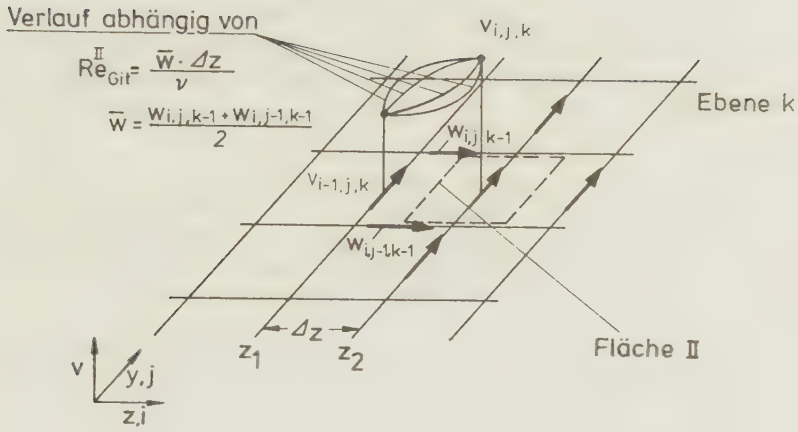



Bild 3.5: Ansicht der Querströmungsebene k

$$v(z) = v_{i-1,j,k} \cdot c_{II} + v_{i,j,k} \cdot (1-c_{II})$$

$$\text{mit} \qquad c_{II} = \frac{e^{Re^{II}_{Git} \cdot \frac{z-z_1}{\Delta z}} - e^{Re^{II}_{Git}}}{1 - e^{Re^{II}_{Git}}} \qquad (11)$$

wiedergegeben. Darin ist $\Delta z$ der Abstand der Stützstellen, $z_1$ die z-Koordinate der Stützstelle $v_{i-1,j,k}$. Der Index II von $c_{II}$ und $Re^{II}_{Git}$ soll darauf hindeuten, daß die Gleichung zur Bestimmung der Größen auf der Fläche II benötigt wird.

$Re^{II}_{Git}$ stellt den erwähnten freien Parameter dar, der die Form der Funktion beeinflußt. Er hat die Gestalt einer

Reynoldszahl, die gebildet wird mit der Gitterweite $\Delta z$, der örtlichen Zähigkeit $\nu$ und der mittleren Geschwindigkeitskomponente in Richtung der die beiden Stützstellen verbindenden Geraden.

$$Re^{II}_{Git} = \frac{\bar{w} \cdot \Delta z}{\nu}$$

$$\text{mit} \qquad \bar{w} = \frac{w_{i,j,k-1} + w_{i,j-1,k-1}}{2}$$

Da $\bar{w}$ ebenso wie die örtliche Viskosität $\nu$, die entsprechend dem in Abschnitt 3.8. beschriebenen Turbulenzmodell von den lokalen Geschwindigkeitsgradienten abhängt, zu Beginn der Rechnung unbekannt ist, hängt der zwischen den Stützstellen angenommene Funktionsverlauf von der a priori unbekannten Lösung des Strömungsproblems ab. Daher wird der dann ebenfalls zunächst unbekannte Parameter $Re^{II}_{Git}$ näherungsweise mit den Werten der stromaufwärts benachbarten Querströmungsebene gebildet.

Der Wert der Funktion v auf der Fläche II des Kontrollraumes aus Bild 3.4 und Bild 3.5 ist dann

$$v\big|_{\text{Fläche II}} = v_{i-1,j,k} \cdot c_{II} + v_{i,j,k} \cdot (1-c_{II}) \qquad (12)$$

$$\text{mit} \qquad c_{II} = \frac{e^{Re^{II}_{Git}/2} - e^{Re^{II}_{Git}}}{1 - e^{Re^{II}_{Git}}} \quad ,$$

weil die Fläche II entsprechend der Definition des Kontroll-

raumes in der Mitte zwischen den Gitterpunkten bei

$$\frac{z-z_1}{\Delta z} = \frac{1}{2}$$

liegt.

Nun soll der Einfluß des Parameters $Re_{Git}^{II}$ auf die Form der Funktion für spezielle Werte von $Re_{Git}^{II}$ veranschaulicht werden. Da die Geschwindigkeit $\bar{w}$ sowohl positiv als auch negativ sein kann, sind auch für $Re_{Git}^{II}$ beide Vorzeichen möglich.

Ist $\bar{w} = 0$, so gilt $Re_{Git}^{II} = 0$. Nach Gleichung (12) gilt dann:

$$\lim_{Re_{Git}^{II} \to 0} c_{II} = 0{,}5 \quad .$$

Deshalb ergibt sich für diesen Fall auf der Fläche II der gleiche Wert für v wie bei Annahme eines linearen Funktionsverlaufs zwischen den Stützstellen , da der v-Wert auf dieser Fläche dann gerade das arithmetische Mittel der Stützstellenwerte $v_{i-1,j,k}$ und $v_{i,j,k}$ darstellt.

Wird $Re_{Git}^{II}$ sehr groß, so ergibt sich jedoch wegen

$$\lim_{Re_{Git}^{II} \to +\infty} c_{II} = 1 \quad ,$$

wieder für das Beispiel des v-Wertes auf der Kontrollraumbegrenzungsfläche II,

$$v\big|_{\text{Fläche II}} = v_{i-1,j,k} \quad \text{für } Re_{Git}^{II} \to +\infty \, .$$

Dies entspricht der Annahme eines stückweise konstanten Verlaufs der Funktion zwischen den Stützstellen.

Entsprechend ergibt sich für betragsmäßig sehr große, aber negative $Re^{II}_{Git}$ - Zahlen wegen

$$\lim_{Re^{II}_{Git} \to -\infty} c_{II} = 0$$

ebenfalls ein Ergebnis, das der Annahme eines stückweise konstanten Verlaufs entspricht. Der zwischen den Stützstellen angenommene konstante Funktionswert ist jedoch nicht mehr der in Bild 3.5 linke Wert $v_{i-1,j,k}$, sondern der rechte Wert $v_{i,j,k}$:

$$v|_{\text{Fläche II}} = v_{i,j,k} \quad \text{für } Re^{II}_{Git} \to -\infty .$$

Abhängig von der zunächst unbekannten Lösung des Strömungsproblems liefert die Exponentialfunktion (12) also entsprechend den lokalen Strömungsverhältnissen einen Funktionsverlauf zwischen den Stützstellen, der in den Extremfällen $Re^{II}_{Git} \to -\infty$ und $Re^{II}_{Git} \to -\infty$ der Annahme eines stückweise konstanten Verlaufes entspricht und bei $Re^{II}_{Git} = 0$ ein Ergebnis entsprechend eines linearen Verlaufes liefert.

Zur Umformung von Gleichung (10) können nun die v-Werte auf allen Begrenzungsflächen des Kontrollraumens aus Bild 3.4 durch die Stützstellenwerte ausgedrückt werden, wie es für Fläche II gezeigt wurde. Es ergibt sich (siehe dazu Bild 3.4):

$$v|_{\text{Fläche I}} = v_{i,j-1,k} \cdot c_I + v_{i,j,k} \cdot (1-c_I) \qquad (13a)$$

$$v|_{\text{Fläche II}} = v_{i-1,j,k} \cdot c_{II} + v_{i,j,k} \cdot (1-c_{II}) \tag{13b}$$

$$v|_{\text{Fläche III}} = v_{i,j,k} \cdot c_{III} + v_{i,j+1,k} \cdot (1-c_{III}) \tag{13c}$$

$$v|_{\text{Fläche IV}} = v_{i,j,k} \cdot c_{IV} + v_{i+1,j,k} \cdot (1-c_{IV}) \tag{13d}$$

$$v|_{\text{Fläche V}} = v_{i,j,k-1} \cdot c_{V} + v_{i,j,k} \cdot (1-c_{V}) \tag{13e}$$

$$v|_{\text{Fläche VI}} = v_{i,j,k} \cdot c_{VI} + v_{i,j,k+1} \cdot (1-c_{VI}) \tag{13f}$$

Darin gilt für die $c_I$ bis $c_{VI}$ jeweils

$$c_i = \frac{e^{Re^i_{Git}/2} - e^{Re^i_{Git}}}{1 - e^{Re^i_{Git}}} \tag{14}$$

Für die sechs Werte $Re^i_{Git}$ folgt:

$$Re^I_{Git} = \frac{\frac{1}{2}(v_{i,j,k-1} + v_{i,j-1,k-1}) \cdot \Delta y}{\nu} \tag{15a}$$

$$Re^{II}_{Git} = \frac{\frac{1}{2}(w_{i,j,k-1} + w_{i,j-1,k-1}) \cdot \Delta z}{\nu} \tag{15b}$$

$$Re^{III}_{Git} = \frac{\frac{1}{2}(v_{i,j+1,k-1} + v_{i,j,k-1}) \cdot \Delta y}{\nu} \tag{15c}$$

$$Re^{IV}_{Git} = \frac{\frac{1}{2}(w_{i+1,j,k} + w_{i+1,j-1,k-1}) \cdot \Delta z}{\nu} \tag{15d}$$

$$Re^{V}_{Git} = \frac{\frac{1}{2}(u_{i,j,k-1} + u_{i,j-1,k-1}) \cdot \Delta x}{\nu} \tag{15e}$$

$$Re^{VI}_{Git} = \frac{\frac{1}{2}(u_{i,j,k-1} + u_{i,j-1,k-1}) \cdot \Delta x}{\nu} \tag{15f}$$

Da ausgehend von einer bekannten Geschwindigkeitsverteilung am Eintritt des Kanals schrittweise von einer Querströmungsebene zur nächsten gerechnet werden soll, dürfen in der abzuleitenden algebraischen Gleichung nur Werte der Querströmungsebene k-1 (die bekannt sind) und der Ebene k (die bestimmt werden sollen) vorkommen. Werte der Ebene k+1 dürfen dagegen nicht erscheinen, da sonst eine simultane Bestimmung der Unbekannten aller Querströmungsebenen erforderlich wäre. Bei der Darstellung des v-Wertes auf der Fläche VI erscheint jedoch die Größe $v_{i,j,k+1}$. Da dies eine schrittweise Rechnung in x-Richtung verhindert, muß die Annahme über den Verlauf der Funktionen in Durchflußrichtung etwas modifiziert werden. Damit $v_{i,j,k+1}$ nicht erscheint, wird in Gleichung (13f) der Faktor $c_{VI}$ zu Eins angenommen. Dann folgt

$$v|_{\text{Fläche VI}} = v_{i,j,k} \ .$$

Der sich bei Annahme des Exponentialverlaufs nur im Extremfall großer $Re_{Git}$- Zahlen ergebende stückweise konstante Verlauf zwischen den Stützstellen wird in Durchflußrichtung also in jedem Fall gewählt.

Bild 3.6 zeigt die Größe von $c_{VI}$ in Abhängigkeit von $Re^{VI}_{Git}$ entsprechend Gleichung (14). Da $Re^{VI}_{Git}$ mit der Geschwindigkeitskomponente in Durchflußrichtung u gebildet wird, ist diese Zahl nach Voraussetzung immer größer als Null. Damit gilt immer $c_{VI} > 0{,}5$. Ist $Re^{VI}_{Git} > 10$, so ist $c_{VI}$ bereits größer als 0,99 und nähert sich asymptotisch dem Wert Eins. Da in den betrachteten Kanälen Strömungen hoher Reynoldszahlen vorliegen, kann also davon ausgegangen werden, daß die Annahme stückweise konstanten Verlaufs in Durchflußrichtung und die daraus resultierende Möglichkeit schrittweiser Berechnung der Strömung gerechtfertigt ist.

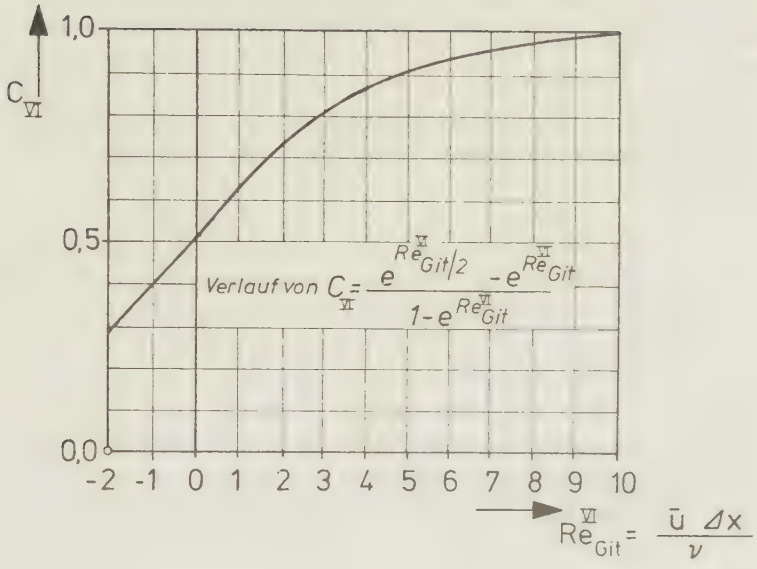



Bild 3.6: Abhängigkeit des Faktors $c_{VI}$ von $Re^{VI}_{Git}$

Alle Terme der Gleichung (10) können nun entsprechend den getroffenen Annahmen durch Stützstellenwerte ausgedrückt werden. Zur Bildung der Ableitungen in den Reibungstermen ist dabei die Exponentialfunktion (11) zunächst abzuleiten. Dies ergibt am Beispiel von $\partial v/\partial z$ auf der Fläche II:

$$\left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{\text{Fläche II}} = \frac{Re^{II}_{Git}}{\Delta z} \cdot \frac{e^{Re^{II}_{Git}}}{e^{Re^{II}_{Git}} - 1} \cdot (v_{i,j,k} - v_{i-1,j,k})$$

Entsprechend werden die anderen Ableitungen gebildet.

Für die Druckterme brauchen keine Annahmen getroffen zu werden, da die Werte dort genau an den Stützstellen benötigt werden.

Sind alle Terme ersetzt, so kann Gleichung (10) in folgende Beziehung umgeformt werden:

$$K_1 \cdot v_{i,j-1,k} + K_2 \cdot v_{i-1,j,k} + K_3 \cdot v_{i,j+1,k} + K_4 \cdot v_{i+1,j,k} + \\ + K_p \cdot (p_{i,j,k} - p_{i,j-1,k}) + K_5 = K_6 \cdot v_{i,j,k} \qquad (16)$$

Darin bedeuten:

$$K_1 = \frac{\frac{\Delta x \cdot \Delta z}{\Delta y} \cdot \nu \cdot Re^{I}_{Git} \cdot e^{Re^{I}_{Git}}}{e^{Re^{I}_{Git}} - 1}$$

$$K_2 = \frac{\frac{\Delta x \cdot \Delta y}{\Delta z} \cdot \nu \cdot Re^{II}_{Git} \cdot e^{Re^{II}_{Git}}}{e^{Re^{II}_{Git}} - 1}$$

$$K_3 = \frac{\frac{\Delta x \cdot \Delta z}{\Delta y} \cdot \nu \cdot Re^{III}_{Git}}{e^{Re^{III}_{Git}} - 1}$$

$$K_4 = \frac{\frac{\Delta x \cdot \Delta y}{\Delta z} \cdot \nu \cdot Re^{IV}_{Git}}{e^{Re^{IV}_{Git}} - 1}$$

$$K_5 = \frac{\Delta y \cdot \Delta z}{\Delta x} \cdot \nu \cdot Re^{V}_{Git} \cdot v_{i,j,k-1}$$

$$K_6 = \frac{\Delta y \cdot \Delta z}{\Delta x} \cdot \nu \cdot Re^{VI}_{Git} + K_1 + K_2 + K_3 + K_4$$

$$K_p = - \frac{\Delta x \cdot \Delta z}{\rho}$$

Bild 3.7 zeigt, daß die Komponente $v_{i,j,k}$ durch Gleichung (16) wie bei einem üblichen Differenzenstern mit den Komponenten an den Nachbarpunkten der Querströmungsebene linear verknüpft ist.

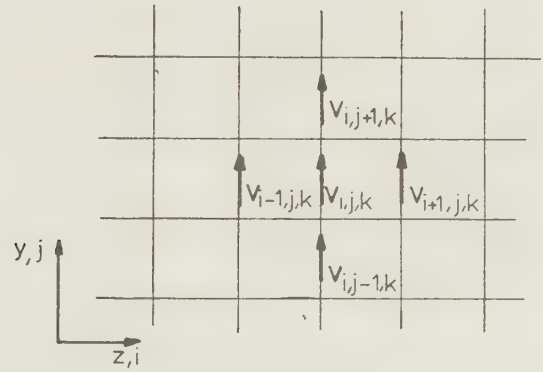



Bild 3.7: Durch Gleichung (16) verknüpfte Stützstellenwerte

Da die Beziehung (16) für jeden Punkt (i,j,k) aufgestellt werden kann, ergibt sich ein lineares Gleichungssystem, das alle v-Komponenten der Querströmungsebene k als Unbekannte enthält. Da andererseits auch für jede v-Komponente eine Gleichung aufgestellt werden kann, stimmt die Zahl der Gleichungen mit der der Unbekannten überein.

Zur Verwendung im ausgeführten Rechenprogramm sind die Gleichungskoeffizienten $K_1$ bis $K_4$, zu deren Bestimmung eine Exponentialfunktion berechnet werden muß, durch Näherungsgleichungen dargestellt worden. Dies hat folgende Gründe:

- die Bestimmung von Exponentialfunktionen ist sehr rechenzeitintensiv
- im Fall verschwindender Querströmungen (v = 0, w = 0) haben die Terme zur Bestimmung der Koeffizienten $K_1$ bis $K_4$ zwar den endlichen und eindeutigen Grenzwert 0.5 , jedoch ist dieser Wert nicht direkt berechenbar, da jeweils der Nenner zu Null wird. Es muß also vor jeder Bestimmung eines solchen Koeffizienten eine (rechenzeitintensive) Abfrage durchgeführt werden.
- die einzelnen auszuführenden Exponentiationen überschreiten leicht den Rechenbereich des Computers, obwohl der Wert für den Koeffizienten im normalen Bereich liegt.

Es ist daher sinnvoll, die Koeffizienten durch mehrere Geradenstücke anzunähern. Zur Bildung des Koeffizienten $K_2$, der eigentlich durch die Gleichung

$$K_2 = \frac{\frac{\Delta x \cdot \Delta y}{\Delta z} \cdot \nu \cdot Re^{II}_{Git} \cdot e^{Re^{II}_{Git}}}{e^{Re^{II}_{Git}} - 1} \qquad (17)$$

beschrieben wird, kann z.B. folgende Wahl getroffen werden:

$$K_2 = \begin{cases} 0; & \text{für } Re^{II}_{Git} < -2 \\ \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{\Delta z} \cdot \nu \cdot \left[1 + \frac{Re^{II}_{Git}}{2}\right]; & \text{für } |Re^{II}_{Git}| < 2 \\ \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{\Delta z} \cdot \nu \cdot Re^{II}_{Git}; & \text{für } Re^{II}_{Git} > 2 \end{cases} \qquad (18)$$

Diese Geraden sind zusammen mit dem wirklichen Exponentialverlauf in Bild 3.8 eingezeichnet. Dabei wurde aus Gründen der Übersichtlichkeit jeweils der dimensionslose Ausdruck

$$\bar{K}_2 = \frac{K_2 \cdot \Delta z \cdot \nu}{\Delta x \cdot \Delta y}$$

gebildet. Die Funktion $K_2 = 0$ und die Funktion $K_2 = \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{\Delta z} \cdot \nu \cdot Re^{II}_{Git}$

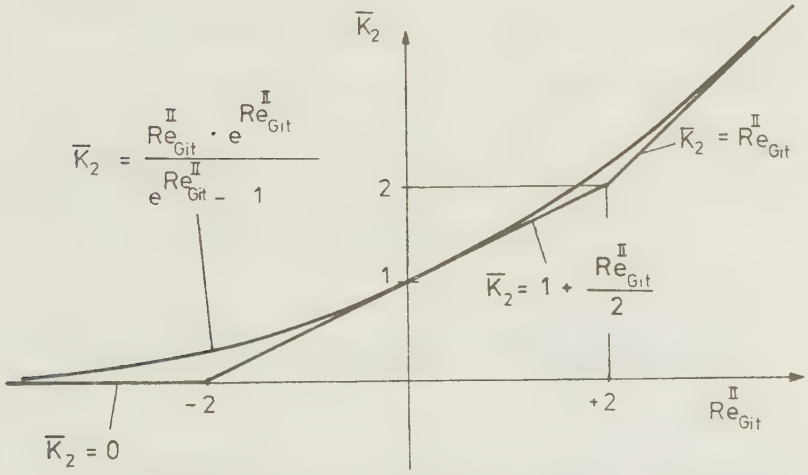



Bild 3.8: Vergleich des Exponentialverlaufs von $K_2$ mit der Annäherung durch Geradenstücke

stellen gerade die Asymptoten der Gleichung (17) für $Re^{II}_{Git} \to -\infty$ und $Re^{II}_{Git} \to +\infty$ dar, wie sich durch Kurvendiskussion nachweisen läßt. Die Funktion im mittleren Bereich für $Re^{II}_{Git} < 2$ ergibt sich dagegen aus der Linearisierung von Gleichung (17) im Punkt $Re^{II}_{Git} = 0$.

Da bei der hier getroffenen Wahl drei verschiedene Bereiche bei der Berechnung von $K_2$ unterschieden werden müssen und Abfragen im Rechner zeitaufwendige Operationen darstellen, wird zur Bestimmung der Koeffizienten rechnerintern eine Betragsfunktion benutzt. Diese lautet für $K_2$:

$$K_2 = \frac{\Delta x \cdot \Delta y \cdot \nu}{2 \cdot \Delta z} \cdot \left[ \left| 1 - \left| \frac{Re^{II}_{Git}}{2} \right| \right| + 1 + \left| \frac{Re^{II}_{Git}}{2} \right| + Re^{II}_{Git} \right] \quad (19a)$$

Durch Nachrechnen ist leicht zu überprüfen, daß diese Funktion äquivalent ist zu der Form (18).

Die anderen Koeffizienten erhalten nach analogen Überlegungen ihre im Rechenprogramm verwendete, endgültige Form:

$$K_1 = \frac{\Delta x \cdot \Delta z \cdot \nu}{2 \cdot \Delta y} \cdot \left[ \left| 1 - \left| \frac{Re^{I}_{Git}}{2} \right| \right| + 1 + \left| \frac{Re^{I}_{Git}}{2} \right| + Re^{I}_{Git} \right] \quad (19b)$$

$$K_3 = \frac{\Delta x \cdot \Delta z \cdot \nu}{2 \cdot \Delta y} \cdot \left[ \left| 1 - \left| \frac{Re^{III}_{Git}}{2} \right| \right| + 1 + \left| \frac{Re^{III}_{Git}}{2} \right| - Re^{II}_{Git} \right] \quad (19c)$$

$$K_4 = \frac{\Delta x \cdot \Delta y \cdot \nu}{2 \cdot \Delta z} \cdot \left[ \left| 1 - \left| \frac{Re^{IV}_{Git}}{2} \right| \right| + 1 + \left| \frac{Re^{IV}_{Git}}{2} \right| - Re^{IV}_{Git} \right] \quad (19d)$$

Beispielrechnungen, die sowohl mit den Gleichungen (19) als auch mit den Exponentialtermen aus Gleichung (16) durchge-

führt wurden, zeigten sehr gute Übereinstimmung beider Fälle, während die benötigte Rechenzeit bei Verwendung der Gleichungen (19) wesentlich geringer war.

Zum Schluß dieses Abschnitts sollen die wichtigsten Eigenschaften der verwendeten Diskretisierung noch einmal zusammengefaßt werden:

- der Verlauf zwischen den Stützstellen der einzelnen Funktionen wird durch eine Exponentialfunktion beschrieben, die entsprechend den örtlichen Strömungsverhältnissen eine andere Form hat. Da diese örtlichen Strömungsverhältnisse nicht a priori bekannt sind, bestimmt das Programm also in Abhängigkeit von der sich ergebenden Lösung selbst die Form der Näherungsfunktion.
- in Durchflußrichtung werden die Funktionen durch stückweise konstanten Verlauf angenähert. Dies entspricht im Grenzfall sehr hoher Durchfluß-Reynoldszahlen dem Exponentialverlauf.

Verfährt man analog bei der Auswertung der Integralgleichungen für die x- und die z-Richtung, so erhält man drei lineare Gleichungssysteme, die als Unbekannte jeweils die Geschwindigkeitskomponenten u bzw. v bzw. w einer Querströmungsebene k enthalten und unabhängig voneinander lösbar sind, wenn die Strömungsgrößen auf der Ebene k-1 bekannt sind.

Es ist also mit Hilfe dieser Gleichungen möglich, von einer auf der Querströmungsebene k-1 bekannten Geschwindigkeitsverteilung zu den Geschwindigkeiten auf der Ebene k weiterzurechnen.

Der in den Impulsgleichungen auf der rechten Seite der Glei-

chungssysteme jeweils auftretende Druckterm wird dabei aus der geschätzten, dreidimensionalen Druckverteilung bestimmt.

Die auf der Ebene k neu bestimmten Geschwindigkeiten werden allerdings im Regelfall nicht die Kontinuitätsgleichung erfüllen. Will man sicherstellen, daß die Geschwindigkeiten auch diese Gleichung erfüllen, so ist die Bestimmung der dazu benötigten Druckverteilung nötig. Es ist also das Ziel, den Druck so zu variieren, daß die in den Impulsgleichungen enthaltenen Druckterme die Lösung gerade so beeinflussen, daß die Bedingung der Massenerhaltung erfüllt ist. Dies wird durch ein System von Korrekturgleichungen erreicht, das im nächsten Abschnitt mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung abgeleitet wird und als Ergebnis Druck- und Geschwindigkeitskorrekturen für die Ebene k bestimmt.

## 3.4. Ableitung der Druckkorrekturgleichung

Die an der Stelle k neu bestimmten Geschwindigkeiten erfüllen im allgemeinen die Kontinuitätsgleichung nicht. Bei Aufstellung der Massenbilanzen für die einzelnen Kontrollräume ergibt sich ein von Null verschiedener Restfehler.

Für jeden Gitterpunkt (i,j,k) der Ebene k und den ihn umgebenden Kontrollraum nach Bild 3.3 kann die diskretisierte Kontinuitätsgleichung (9) aus Abschnitt 3.3.2. aufgestellt werden:

$$\Delta y\cdot\Delta z\cdot u_{i,j,k-1} - \Delta y\cdot\Delta z\cdot u_{i,j,k} + \Delta x\cdot\Delta z\cdot v_{i,j,k} - \tag{20}$$

$$- \Delta x\cdot\Delta z\cdot v_{i,j+1,k} + \Delta x\cdot\Delta y\cdot w_{i,j,k} - \Delta x\cdot\Delta y\cdot w_{i+1,j,k} = \Delta\dot{V}(i,j)$$

Dabei sind $u_{i,j,k}$, $v_{i,j,k}$, $v_{i,j+1,k}$, $w_{i,j,k}$, $w_{i+1,j,k}$ die auf der Ebene k mit Hilfe der Impulsgleichungen neu bestimmten Geschwindigkeiten, $u_{i,j,k-1}$ stammt von der Ebene k-1. Mit Hilfe dieser Gleichung (20) können die Werte $\Delta\dot{V}(i,j) \neq 0$, die die Größe der lokalen Massenbilanzfehler auf der Ebene k darstellen, bestimmt werden (siehe auch Bild 3.3).

Das System der Massenbilanzgleichungen für alle Kontrollräume der Ebene k läßt sich in Matrixform schreiben:

$$\underline{A}\cdot\vec{c} = \Delta\vec{\dot{V}} \tag{21}$$

Dabei ist $\vec{c}$ ein Vektor, der alle an einer der Gleichungen beteiligten Geschwindigkeitskomponenten zusammenfaßt. $\underline{A}$ ist die Matrix der Koeffizienten der Geschwindigkeitskomponenten in den Massenbilanzen; sie enthält also die Oberflächen der Kontrollräume, über die die Kontinuitätsgleichung integriert wurde. $\underline{A}$ ist daher aus der vorgegebenen Geometrie bestimmbar.

Der Vektor $\Delta\dot{\vec{V}}$ ist dann ein Maß für die lokalen Massenbilanzfehler, die aus den neu berechneten Geschwindigkeiten resultieren. Er ist bei vollständiger Erfüllung der Kontinuitätsbedingung gleich dem Nullvektor. Solange die neu berechneten Geschwindigkeitskomponenten u,v und w aber diese Bedingung nicht genau erfüllen, läßt sich ein Vektor $\Delta\dot{\vec{V}} \neq \vec{0}$ berechnen.

Entsprechend dem die Geschwindigkeitskomponenten zusammenfassenden Vektor $\vec{c}$ wird nun ein Geschwindigkeitskorrekturvektor $\vec{c}'$ durch die Gleichung

$$\vec{c}^{\,*} = \vec{c} + \vec{c}' \qquad (22)$$

definiert. $\vec{c}'$ ist darin der Vektor der Korrekturen, die, zu den Werten des Vektors $\vec{c}$ addiert, den Vektor $\vec{c}^{\,*}$ ergeben, der die Massenbilanzen exakt erfüllt. Für $\vec{c}^{\,*}$ gilt also

$$\underline{A} \cdot \vec{c}^{\,*} = \vec{0}$$

Es folgt

$$\underline{A} \cdot (\vec{c} + \vec{c}') = \vec{0}$$

$$\underbrace{\underline{A} \cdot \vec{c}}_{\Delta\dot{\vec{V}}} + \underline{A} \cdot \vec{c}' = \vec{0}$$

und damit

$$\underline{A} \cdot \vec{c}' = -\Delta\dot{\vec{V}} \qquad (23)$$

Die letzte Gleichung (23) stellt ein System zur Bestimmung der Korrekturen $\vec{c}'$ dar. Die Matrix $\underline{A}$ (Oberflächen der Kontrollräume) und der Vektor $\Delta\dot{\vec{V}}$ (aus Gleichung (20)) sind be-

kannt. Allerdings enthält dieses System wesentlich mehr Unbekannte als Gleichungen: die Anzahl der Gleichungen entspricht der Anzahl der Gitterpunkte auf der Ebene k, da für jeden einen Gitterpunkt umgebenden Kontrollraum eine Massenbilanz aufgestellt werden kann. Die Anzahl der Unbekannten entspricht der Anzahl aller auf der Ebene k definierten Geschwindigkeitskomponenten. Es gibt daher unendlich viele Lösungen des Systems (23), d.h. unendlich viele Möglichkeiten, die Massenbilanzen durch Korrekturen der Geschwindigkeiten zu erfüllen. Es müssen daher weitere Bedingungen eingeführt werden, die zusätzliche Bindungen für das Gleichungssystem (23) bedeuten und es eindeutig lösbar machen.

Als Resultat der Rechnung sollen an jedem Ort sowohl die Impuls- als auch die Kontinuitätsgleichung erfüllt sein. Verändert man die aus den Impulsgleichungen bestimmten Geschwindigkeiten durch einen beliebigen Korrekturvektor, der mit Hilfe des System (23) bestimmt wird , so wird zwar die Massenbilanz überall stimmen, die Impulsgleichungen sind jedoch nicht mehr erfüllt. Die Korrekturen müssen also so berechnet werden, daß sie den Impulsgleichungen nicht widersprechen. Die Impulsgleichungen liegen aber fest bis auf den Druckterm, der lediglich aus einer Schätzung stammt. Wie bereits erwähnt, liegt die einzige Möglichkeit, Impuls- und Kontinuitätsgleichung simultan zu erfüllen, in der Bestimmung der dazu benötigten Druckverteilung. Deshalb werden die Geschwindigkeitskorrekturen in eine Beziehung zu Druckkorrekturen gesetzt, die die zuletzt vorhandene Druckverteilung ändern sollen. Alle unbekannten Geschwindigkeitskorrekturen $\vec{c}'$ werden daher zunächst ganz allgemein als Linearkombinationen von Druckkorrekturen $\vec{p}'$ dargestellt:

$$\vec{c}' = \underline{AP} \cdot \vec{p}' \qquad (24)$$

Dabei ist der Vektor $\vec{p}'$ ein Vektor von Druckkorrekturwerten für alle Druck-Stützstellen der Ebene k. Die Matrix $\underline{AP}$ ist zunächst unbestimmt, nur ihre Zeilen- und Spaltenzahl ist durch Gleichung (24) festgelegt. Setzt man (24) in (23) ein, so erhält man

$$\underline{A} \cdot \underline{AP} \cdot \vec{p}' = -\Delta\dot{\vec{V}}$$

Faßt man $\underline{A}$ und $\underline{AP}$ zur Matrix $\underline{T}$ zusammen, so ergibt sich:

$$\underline{T} \cdot \vec{p}' = -\Delta\dot{\vec{V}} \qquad (25)$$

Dies ist ein Gleichungssystem für die Druckkorrekturen $\vec{p}'$, das genauso viele Gleichungen wie Unbekannte enthält.

Für die Festlegung der zunächst unbestimmten Matrix $\underline{AP}$ müssen jetzt Bedingungen gefunden werden. Zunächst muß gelten, daß

$$\det(\underline{T}) = \det(\underline{A} \cdot \underline{AP}) \neq 0$$

ist, um das System eindeutig lösen zu können. Abgesehen von dieser Einschränkung ist die Wahl von $\underline{AP}$ beliebig, wenn es nur auf die exakte Erfüllung der Kontinuitätsgleichung ankommt. Um jedoch die Beziehung zu den Impulsgleichungen herzustellen, sei folgende Überlegung angestellt: die diskretisierte Form der Impulsgleichung für die v-Komponente $v_{i,j,k}$ lautet nach Abschnitt 3.3.3:

$$K_1 \cdot v_{i,j-1,k} + K_2 \cdot v_{i-1,j,k} + K_3 \cdot v_{i,j+1,k} + K_4 \cdot v_{i+1,j,k} +$$

$$+ K_p \cdot (p_{i,j,k} - p_{i,j-1,k}) + K_5 = K_6 \cdot v_{i,j,k}$$

Aufgelöst nach $v_{i,j,k}$ folgt:

$$v_{i,j,k} = \frac{K_1}{K_6} \cdot v_{i,j-1,k} + \frac{K_2}{K_6} \cdot v_{i-1,j,k} + \frac{K_3}{K_6} \cdot v_{i,j+1,k} +$$

$$+ \frac{K_4}{K_6} \cdot v_{i+1,j,k} + \frac{K_p}{K_6} \cdot (p_{i,j,k} - p_{i,j-1,k}) + \frac{K_5}{K_6}$$

Aus dieser Gleichung ist zu erkennen, wie das Druckgefälle in y-Richtung $(p_{i,j,k} - p_{i,j-1,k})$ die Komponente $v_{i,j,k}$ beeinflusst. Die Druckdifferenz geht linear mit dem Faktor

$$\frac{K_p}{K_6} = - \frac{\Delta x \cdot \Delta z}{K_6 \cdot \rho} \qquad \text{(siehe Gleichung 16)}$$

in die Gleichung ein. Damit ist der Einfluß einer Druckkorrektur auf die Geschwindigkeitskomponente $v_{i,j,k}$ in den Impulsgleichungen in erster Näherung bekannt. Die gesuchten linearen Beziehungen zwischen Druck- und Geschwindigkeitskorrekturen werden daher, gezeigt am Beispiel der Komponente $v_{i,j,k}$, wie folgt angesetzt:

$$v'_{i,j,k} = - \frac{\Delta x \cdot \Delta z}{K_6 \cdot \rho} (p'_{i,j,k} - p'_{i,j-1,k}) \qquad (26)$$

Dieser Einfluß einer Druckkorrektur auf die Geschwindigkeit $v_{i,j,k}$ ist nur eine erste Näherung, da die Druckänderungen indirekt auch auf die anderen Terme der Gleichung einwirken. Der Ansatz nach (26) kann deshalb nur zu einer verbesserten Schätzung der Druckverteilung, aber nicht direkt zum endgültigen Ergebnis führen. Insgesamt ist also ein iterativer Prozeß notwendig.

Die in Gleichung (24) eingeführte Matrix AP enthält also für alle Geschwindigkeitskomponenten ihre aus den Impuls-

gleichungen ersichtliche Abhängigkeit von einer lokalen Druckveränderung. Damit ist eine sinnvolle Wahl dieser Matrix, die die Korrektur der Massenbilanzen an die Impulsgleichungen koppelt, gefunden.

Das Gleichungssystem (25) ist nun aufstellbar und lösbar. Die einzelnen Gleichungen enthalten wieder jeweils fünf Unbekannte und können analog zur Darstellung der Impulsgleichungen in der Form

$$B_1 \cdot p'_{i,j-1,k} + B_2 \cdot p'_{i-1,j,k} + B_3 \cdot p'_{i,j+1,k} + B_4 \cdot p'_{i+1,j,k} - B_5 \cdot p'_{i,j,k} = -\Delta V(i,j) \qquad (27)$$

geschrieben werden. Die Ausdrücke zur Berechnung der Koeffizienten $B_1$ bis $B_5$ sind im Anhang A3 unter allgemeinen Bedingungen angegeben.

Da die rechte Seite des Systems von den Massenbilanzfehlern $\Delta\dot{V}$ gebildet wird, ergibt sich die Größe der Druckkorrekturen entsprechend der Größe dieser Fehler. Gehen im Laufe der Iteration die Fehler gegen Null, so gilt entsprechendes, wie erforderlich, auch für die Korrekturen.

Die vorherige Druckverteilung auf der Ebene k wird nun durch die neu bestimmten Korrekturen verändert. Mit Gleichung (26) bzw. (24) sind auch die zugehörigen Geschwindigkeitskorrekturen bestimmbar.

Die korrigierten Geschwindigkeiten erfüllen aufgrund des Ansatzes (23) exakt die Kontinuitätsgleichung. Außerdem ist die Druckverteilung so geändert worden, daß bei erneuter Berechnung von u, v und w an der Stelle k durch die Impulsgleichungen die Geschwindigkeiten auch vor der Korrektur

besser die Massenbilanzen erfüllen, d.h. daß kleinere Massenbilanzfehler $\Delta\vec{V}$ zu erwarten sind.

Zu bemerken ist noch, daß die Matrix AP nur unter dem Gesichtspunkt der möglichst schnellen Konvergenz des Gesamtverfahrens gewählt werden kann, weil sie lediglich die Konvergenzgeschwindigkeit, nicht aber die Werte der endgültigen Lösung beeinflusst. Allerdings ist nach den im Laufe dieser Arbeit gemachten Erfahrungen die oben beschriebene Wahl die günstigste.

Nachdem alle benötigten Integralgleichungen in algebraischer Form als Gleichungssysteme aufgestellt werden können, soll jetzt der Ablauf der gesamten Lösungsprozedur noch einmal zusammengefaßt werden.

Ausgehend von der auf der ersten Querströmungeebene k = 1 vorgegebenen dreidimensionalen Geschwindigkeitsverteilung werden folgende Schritte durchgeführt:

1. Berechnung der u-, v- und w-Komponenten der Geschwindigkeiten auf der Ebene k mit Hilfe der aus den Impulsgleichungen entstandenen linearen Gleichungssysteme und einer geschätzten dreidimensionalen Druckverteilung.

2. Berechnung der Massenbilanzfehler $\Delta\vec{V}$ dieser neu berechneten Geschwindigkeiten auf der Ebene k mit Gleichung (20).

3. Bestimmen der Druckkorrekturen $\vec{p}'$ mit Gleichung (25) und Korrektur der Drücke an den Punkten der Ebene k.

4. Bestimmen der zugehörigen Geschwindigkeitskorrekturen mit Gleichung (24) und Korrektur der in

Schritt 1 berechneten Geschwindigkeiten.

5. Durchführen der Schritte 1 bis 4 , bis das gesamte Lösungsgebiet durchlaufen ist. Danach hat sich eine neue dreidimensionale Druckverteilung ergeben.

6. Wiederholen der Schritte 1 bis 5 mit der neuen Druckverteilung solange, bis die noch vorhandenen Fehler in den lokalen Massenbilanzen eine vorgegebene Grenze nicht mehr überschreiten.

An dieser Stelle sei auf einen besonderen programmtechnischen Vorteil des Verfahrens hingewiesen: nach Durchlaufen des gesamten Lösungsgebietes liegt eine neue Druckverteilung vor, die die ganze bis zu diesem Zeitpunkt erarbeitete Information enthält. Durch die zweidimensionale Speicherung der Geschwindigkeiten „vergißt" der Rechner nach Verlassen einer Querströmungsebene k die dort berechneten Geschwindigkeiten. Das Verfahren ist also sehr einfach restartfähig zu programmieren, d. h. daß eine abgebrochene Rechnung wieder aufgenommen werden kann, wenn lediglich die zuletzt im Lösungsgebiet vorhandene Druckverteilung gespeichert wurde. Dies hat Vorteile bei sehr langen Rechnungen, also bei einer großen Anzahl von Gitterpunkten, weil der Lösungsvorgang in mehrere Abschnitte unterteilt werden kann. Außerdem kann eine Lösung, die mit großen Fehlerschranken, also mit relativ geringer Genauigkeit berechnet wurde, später verfeinert werden, ohne die ganze Rechnung zu wiederholen.

## 3.5. Änderungen bei nicht äquidistantem Gitter

Die Diskretisierung der Differentialgleichungen erfolgte in Abschnitt 3.3. aufgrund der übersichtlicheren Darstellung mit Hilfe von kartesischen Koordinaten und unter der Voraussetzung äquidistanter Gitterweiten. Um die Gitterweite unterschiedlichen Gradienten der Lösungsfunktionen anzupassen ist es jedoch wünschenswert, die Gitterabstände veränderlich wählen zu können. Läßt man diese Abstände als beliebig veränderlich zu, so ergeben sich Änderungen in den Impulsgleichungen.

In Bild 3.9 ist das Gitter auf einer Querströmungsebene k mit nicht konstanten Abständen $\Delta y$ und $\Delta z$ dargestellt.

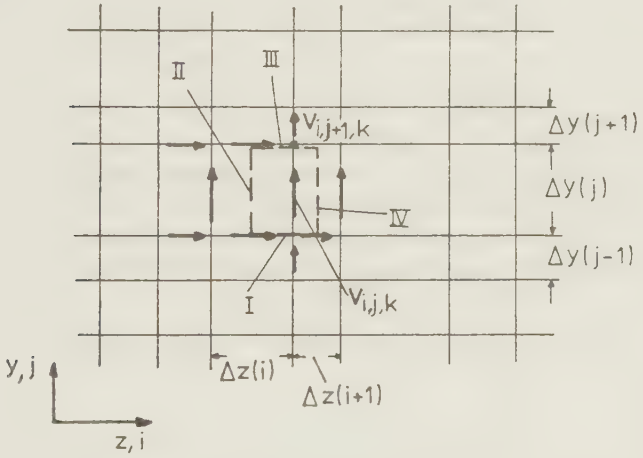



Bild 3.9: Querströmungsebene k mit nicht äquidistantem Gitter

Die Stützstellen der Funktionen u, v, w und p liegen unver-

ändert: p ist auf den Kreuzungspunkten des Gitters, die Geschwindigkeiten auf den Mittelpunkten der Strecken zwischen den Knoten definiert.

Die Änderungen bei nicht äquidistantem Gitter sollen wieder am Beispiel der v-Impulsgleichung dargestellt werden. In Bild 3.9 ist eine v-Stützstelle $v_{i,j,k}$ mit dem zugehörigen Kontrollraum eingezeichnet. Zur Berechnung der Integrale von Gleichung (10) werden die Werte von v auf den Begrenzungsflächen des Kontrollraums in Abhängigkeit von den Werten an den Stützstellen benötigt. Dabei wird der Verlauf der Funktionen zwischen den Stützstellen weiterhin durch die Exponentialfunktion (11) angenähert. Die Begrenzungsflächen der Kontrollräume liegen bei konstanten Gitterabständen immer in der Mitte zwischen zwei Stützstellen der Funktion v. In Gleichung (11) konnte daher gesetzt werden:

$$\frac{z - z_1}{\Delta z} = \frac{1}{2}$$

Bei unregelmäßigem Gitter liegen die Begrenzungsflächen jedoch nicht immer an dieser Stelle. Im Fall der Fläche III aus Bild 3.9 ist z.B. der v-Wert mit Hilfe der Stützstellenwerte $v_{i,j,k}$ und $v_{i,j+1,k}$ wie folgt zu bestimmen:

$$v|_{\text{Fläche III}} = v_{i,j,k} \cdot c_{III} + v_{i,j+1,k} \cdot (1 - c_{III})$$

mit

$$c_{III} = \frac{e^{Re^{III}_{Git} \cdot \frac{\Delta y(j)}{\Delta y(j) + \Delta y(j+1)}} - e^{Re^{III}_{Git}}}{1 - e^{Re^{III}_{Git}}}$$

Bei $\Delta y(j) = \Delta y(j+1) = \Delta y = \text{const}$ geht dies wieder in die

bisher verwendete Form (14) über.

Entsprechend werden die anderen Größen unter Berücksichtigung der ungleichen Gitterabstände berechnet und in die Impulsgleichungen eingeführt. Im Anhang A3 sind alle Gleichungen unter Berücksichtigung veränderlicher Gitterweiten vollständig aufgeführt.

## 3.6. Festlegung der Kontrollräume am Rand des Lösungsgebietes

Die Verwendung unterschiedlicher Stützstellen für die einzelnen Funktionen bedingt Schwierigkeiten bei der Festlegung der Lage und der Größe eines Kontrollraumes am Rand des Lösungsgebietes. Um durch die Kontrollräume jeweils das gesamte Lösungsgebiet abzudecken, und um für jede Funktion Stützstellen auf dem Rand zu bekommen, muß die Festlegung der Kontrollräume am Rand zum Teil anders als im Inneren des Lösungsgebietes erfolgen.

In Bild 3.10 ist eine Querströmungsebene mit einem festen unteren Rand dargestellt. Der Kontrollraum, der zur Inte-

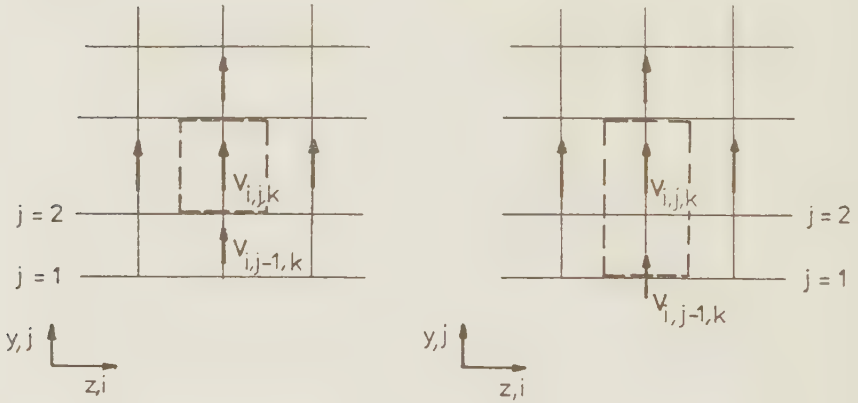



Bild 3.10: Lage der Kontrollräume am Rand

gration der Gleichung für die Größe $v_{i,j,k}$ benutzt wird, wäre, entspräche er der im Inneren benutzten Konstruktion, bereits bei der Linie j = 2 zu Ende (linkes Bild). Außerdem wäre die Komponente $v_{i,j-1,k}$ nicht am Rand, sondern in der Mitte zwischen den Linien j = 1 und j = 2 definiert.

Um eine Randbedingung für v direkt auf dem Rand erfüllen zu können, wird die Stützstelle von $v_{i,j-1,k}$ direkt auf den Rand verschoben und der Kontrollraum bis dorthin verlängert. (rechtes Bild). Diese neuen geometrischen Abmessungen und die neue Lage der Stützstelle für $v_{i,j-1,k}$ werden bei der Aufstellung der Gleichung für $v_{i,j,k}$ berücksichtigt. Der Wert der Funktion v auf der unteren Begrenzungsfläche des Kontrollraums wird dann nicht mehr durch Interpolation zwischen $v_{i,j,k}$ und $v_{i,j-1,k}$, sondern einfach durch den Term $v_{i,j-1,k}$ ausgedrückt.

Eine entsprechende Anpassung aller anderen Kontrollräume ermöglicht die Erfüllung von Randbedingungen direkt auf dem Rand des Lösungsgebietes.

## 3.7. Randbedingungen

Sind alle einzelnen Kontrollräume von Koordinatenflächen des verwendeten Koordinatensystems begrenzt, so sind die das gesamte Lösungsgebiet umschließenden Flächen ebenfalls Koordinatenflächen. Auf diesen Flächen werden folgende Randbedingungen vorgegeben und in die linearen Gleichungssysteme eingeführt:

- die Geschwindigkeitsverteilung am Eintrittsquerschnitt des Kanals $u_E$, $v_E$ und $w_E$
- die Haftbedingung an Kanalwänden
  $u_{Wand} = v_{Wand} = w_{Wand} = 0$
- die Druckverteilung $p_A$ auf der letzten für die Rechnung gewählten Querströmungsebene

Diese Bedingungen sind in Bild 3.11 veranschaulicht. Dabei

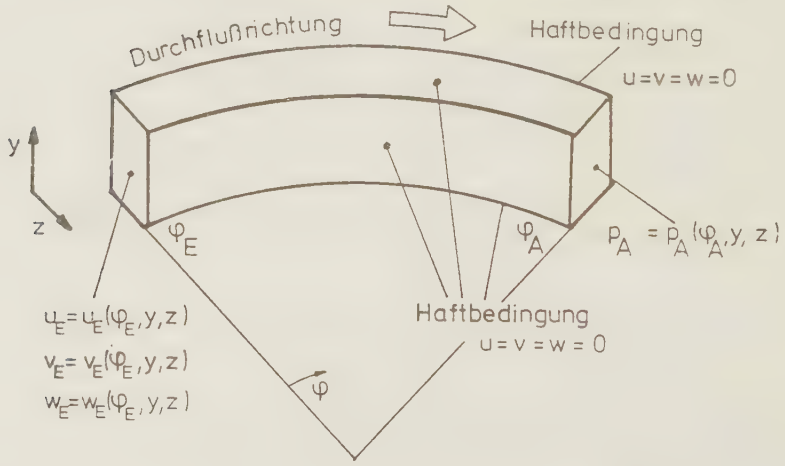



Bild 3.11: Vorgabe der Randbedingungen

handelt es sich um einen gekrümmten Strömungskanal mit $\varphi$ als Durchflußkoordinate, wie er durch die Koordinatenflächen eines Zylinderkoordinatensystems festgelegt wird. Der Eintrittsquerschnitt liegt bei $\varphi_E$ und der Austrittsquerschnitt bei $\varphi_A$.

Der in Bild 3.11 dargestellte Kanal ist sowohl in y- als auch in z-Richtung von festen Wänden umschlossen. Bei den zu berechnenden Rückführkanälen fallen diese Wände bei unbeschaufelten Rückführungen in der Umfangsrichtung fort, wie Bild 3.12 zeigt. Deshalb muß für diese Richtung eine

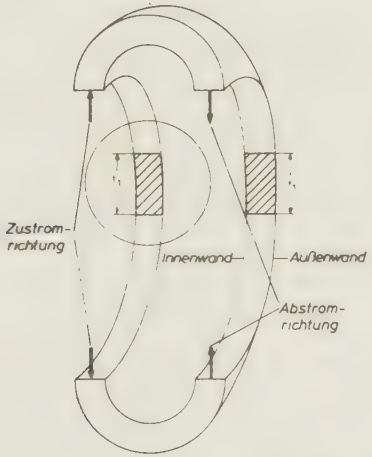



Bild 3.12: Unbeschaufelte 180°- Umlenkung

andere Randbedingung gefunden werden. In Bild 3.12 stellt $t_1$ die Schaufelteilung eines dem Umlenkkanal vorausgehenden Schaufelkranzes (z.B. Radiallaufrad) dar. Wenn die Abströmung aus diesem Schaufelkranz für jede Teilung gleich ist, wiederholt sich die gleiche dreidimensionale Geschwindig-

keitsverteilung periodisch in Umfangsrichtung, so daß die Berechnung einer Teilung zur Beschreibung der gesamten Strömung ausreicht. Es ist also möglich, in dieser Richtung die periodische Wiederholung als Bedingung in die Gleichungssysteme einzugeben und damit die Systeme zu schließen. In Bild 3.13, in dem das in Bild 3.12 durch einen Kreis gekennzeichnete Gebiet vergrößert dargestellt ist, zeigt diese Art

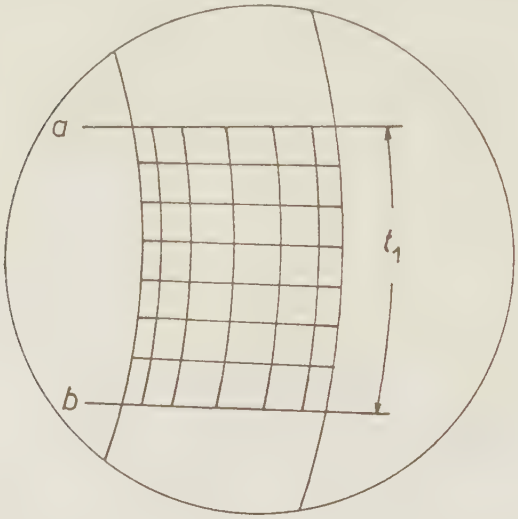



Bild 3.13: Gitter im Bereich einer Schaufelteilung

der Randbedingung. Das numerische Gitter bedeckt lediglich den Bereich einer Teilung. Die Randbedingungen werden dann durch die Beziehungen

$$u_a = u_b$$
$$v_a = v_b$$
$$w_a = w_b$$
$$p_a = p_b$$

ausgedrückt.

## 3.8. Turbulenzmodell

Auch in stationären Strömungen, wie sie in dieser Arbeit betrachtet werden, treten bei höheren Geschwindigkeiten instationäre Schwankungen der Strömungsgrößen u,v,w und p auf. Diese Erscheinung wird als Turbulenz bezeichnet.

Die Strömungsgrößen schwanken dabei um einen zeitlich konstanten Mittelwert, so daß jede Größe $\Phi$ in einen von der Zeit t unabhängigen Mittelwert $\bar{\Phi}$ und in eine zeitlich veränderliche Schwankungsgröße $\Phi'$ aufgespalten werden kann:

$$\Phi(t) = \bar{\Phi} + \Phi'(t)$$

Dabei gilt:

$$\frac{1}{t_o} \cdot \int_0^{t_o} \Phi(t) \cdot dt = \bar{\Phi}$$

und

$$\int_0^{t_o} \Phi'(t) \cdot dt = 0 \ ,$$

wenn $t_o$ eine im Vergleich zur Periodendauer der Schwankungsbewegung große Zeitspanne darstellt.

Die genaue Beschreibung der Strömung einschließlich der instationären Schwankungen stellt ein überaus rechenaufwendiges und deshalb bisher ungelöstes Problem dar. Da es für den Ingenieur nicht wichtig ist, die instationäre Bewegung jedes Fluidteilchens im Detail zu kennen, braucht bei der Einbeziehung der Turbulenz in die Rechnung nur der Einfluß der Schwankungsbewegungen auf die zeitlich konstanten Mittelwerte modelliert zu werden. Es kann deshalb von vorne herein eine zeitliche Mittelung der Bewegungsgleichungen erfolgen, bei der dann zwar Information über die Art der Schwankungs-

bewegung verloren geht, die auf der anderen Seite aber die Kompliziertheit der mathematischen Zusammenhänge reduziert. Ersetzt man in den Bewegungsgleichungen (1) die Variablen u,v,w und p jeweils durch die Summe aus konstantem Mittelwert und instationärer Schwankung und mittelt die einzelnen Terme der Gleichungen mit Hilfe der Beziehung

$$\frac{1}{t_o} \cdot \int_0^{t_o} \varphi(t) \cdot dt = \bar{\varphi}$$

so ergibt sich folgende neue Form der Gleichungen:

$$\bar{u} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \cdot \left[ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right] - \frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \tag{28a}$$

$$\bar{u} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \nu \cdot \left[ \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} \right] - \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z} \tag{28b}$$

$$\bar{u} \cdot \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \cdot \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \cdot \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \nu \cdot \left[ \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} \right] - \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{w'^2}}{\partial z} \tag{28c}$$

In diesen sogenannten Reynolds'schen Gleichungen treten die zeitlich konstanten Mittelwerte $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ und $\bar{p}$ auf. Wegen der

Beziehung

$$\frac{1}{t_o} \cdot \int_0^{t_o} \Phi' \, dt = \bar{\Phi}' = 0$$

kommen die Schwankungsanteile u', v', w' und p' nicht mehr in linearer Form vor. Nur Produkte dieser Größen erscheinen, zeitlich gemittelt, in diesen Gleichungen, da

$$\frac{1}{t_o} \cdot \int_0^{t_o} \Phi_1' \cdot \Phi_2' \, dt = \overline{\Phi_1' \cdot \Phi_2'} \neq 0 \; .$$

Die linken Seiten dieser Gleichungen stimmen formal mit den Navier-Stokes-Gleichungen (1) überein, wenn an Stelle von u, v und w die zeitlichen Mittelwerte dieser Größen geschrieben werden. Dasselbe gilt für Druck- und Reibungsglieder auf der rechten Seite. Zusätzlich erscheinen jedoch weitere Glieder, die aus den turbulenten Schwankungsbewegungen herrühren.

Eine Umstellung der Gleichungen ergibt:

$$\bar{u} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\nu \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \overline{u'^2}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\nu \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \overline{u'v'}\right] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left[\nu \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \overline{u'w'}\right] \qquad (29a)$$

$$\bar{u} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\nu \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \overline{u'v'}\right] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left[\nu \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - \overline{v'^2}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\nu \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} - \overline{v'w'}\right] \qquad (29b)$$

$$\bar{u}\cdot\frac{\partial\bar{w}}{\partial x} + \bar{v}\cdot\frac{\partial\bar{w}}{\partial y} + \bar{w}\cdot\frac{\partial\bar{w}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\nu\cdot\frac{\partial\bar{w}}{\partial x} - \overline{u'w'}\right] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left[\nu\cdot\frac{\partial\bar{w}}{\partial y} - \overline{v'w'}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\nu\cdot\frac{\partial w}{\partial z} - \overline{w'^2}\right] \qquad (29c)$$

In dieser Schreibweise ist zu erkennen, daß die Zusatzglieder auf der rechten Seite als die Komponenten eines Spannungstensors aufgefaßt werden können, der ähnlich wie die Reibungskräfte am Fluidelement angreift. Die zeitlichen Mittelwerte der Geschwindigkeitskomponenten der turbulenten Bewegung genügen also denselben Gleichungen wie eine laminare Strömung, bei der jedoch zu den Reibungskräften zusätzliche Spannungen, die sogenannten Reynolds'schen Spannungen, hinzutreten. Diese zusätzlichen Spannungen werden durch die turbulente Schwankungsbewegung hervorgerufen. Sie addieren sich zu den bereits infolge der Zähigkeit des Fluids auftretenden Normal- und Tangentialspannungen und wirken sich in ähnlicher Weise auf den Bewegungsablauf aus. Die turbulente Mischbewegung bringt dabei Wirkungen hervor, als ob die Zähigkeit des Fluids um mehrere Größenordnungen erhöht wäre /8/.

Aus diesem Grunde werden beim Austauschansatz nach J. Boussinesq /8,64/ in Analogie zum Newton'schen Gesetz der Flüssigkeitsreibung die turbulenten Scheinspannungen als proportional zu den Geschwindigkeitsgradienten angenommen. Dabei wird als (allerdings von Ort zu Ort veränderlicher) Proportionalitätsfaktor eine scheinbare Viskosität $\nu_t$ eingeführt, die als Wirbelviskosität bezeichnet wird. Boussinesq's Ansatz, der bei Rodi /64/ für den allgemeinen dreidimensionalen Fall angegeben ist, lautet z.B. für den Term $\overline{u'v'}$ der Reynolds'schen Schubspannungen:

$$-\overline{u'v'} = \nu_t\cdot\left[\frac{\partial\bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial\bar{v}}{\partial x}\right]$$

Entsprechend werden in /64/ die anderen Terme der Reynolds'schen Spannungen in Beziehung zu den Gradienten der mittleren Strömungsgeschwindigkeit gesetzt. In allen diesen Beziehungen wird jeweils die gleiche Größe $\nu_t$ als Proportionalitätsfaktor benutzt. In die Gleichungen (29) eingesetzt und mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung umgeformt ergeben sich dann Bewegungsgleichungen für die Mittelwerte der Geschwindigkeiten, die identisch mit den ursprünglichen Gleichungen (1) sind, lediglich die Stoffzähigkeit $\nu$ ist darin durch die Summe $(\nu + \nu_t)$ ersetzt. Die Summe wird dann als effektive Zähigkeit $\nu_{eff}$ bezeichnet:

$$\nu_{eff} = \nu + \nu_t \quad .$$

Während der durch die zeitliche Mittelung der Bewegungsgleichungen aufgetretene Informationsverlust sich in den Reynolds'schen Gleichungen durch das Auftreten der neun zusätzlich unbekannten Reynolds'schen Spannungen bemerkbar gemacht hatte, sind diese Unbekannten durch den Ansatz nach Boussinesq auf eine zusätzliche Unbekannte, nämlich $\nu_t$, reduziert worden. Es bleibt dann noch die Aufgabe, $\nu_t$ in Abhängigkeit von der Geometrie und den gemittelten Strömungsgrößen $\bar{u}$, $\bar{v}$ und $\bar{w}$ zu bestimmen.

Das oben beschriebene Prinzip der Wirbelviskosität findet Anwendung z.B. in /49,50,51/ und /42,43/, wo die Verteilung von $\nu_t = \nu_t(x,y,z,\bar{u},\bar{v},\bar{w})$ durch verschiedene halbempirische Modelle ermittelt wird.

In dieser Arbeit erfolgt die Bestimmung der örtlichen Wirbelviskosität durch den Mischungsweganssatz von Prandtl /8,64/. Dieser Ansatz setzt $\nu_t$ über einen nur von der Geometrie abhängigen Faktor $l^2$ in Beziehung zu den örtlichen Gradienten der mittleren Strömungsgeschwindigkeit. In Gebieten hoher Gradienten ergibt sich damit eine hohe turbulente Scheinviskosität. Die Bestimmung der örtlichen Geschwindigkeits-

gradienten erfolgt nach einer von Moore /50/ angegebenen Gleichung, die er mit Erfolg bei der Berechnung der Durchströmung eines ungleichförmig gekrümmten Kanals anwendete. Die Beziehung zur Bestimmung von $\nu_t$ lautet damit:

$$\nu_t = l^2 \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y}\right)^2} \qquad (30)$$

Die Ableitungen in dieser Gleichung können numerisch durch Differenzenbildung bestimmt werden.

Zur Berechnung der sogenannten Mischungsweglänge l wird ein empirischer Ansatz von Nikuradse gewählt, der die Verteilung von l in mit hoher Reynoldszahl ($Re > 10^5$ nach /8/) durchströmten Kanälen gut wiedergibt. Diese Beziehung ist bei Rodi /64/ und Schlichting /8/ angegeben und lautet

$$\frac{l}{b} = 0.14 - 0.08 \left(1 - \frac{2s}{b}\right)^2 - 0.06 \left(1 - \frac{2s}{b}\right)^4 \qquad (31)$$

Darin bedeuten l die Mischungsweglänge, b die Kanalbreite, und s die Entfernung des jeweils betrachteten Punktes von der nächsten Kanalwand. Die Mischungsweglänge ist nach (31) nur von der Kanalgeometrie abhängig. Da der zur Bestimmung von $\nu_t$ verwendete Ausdruck (30) aber von der zunächst unbekannten Geschwindigkeitsverteilung abhängt, wird $\nu_t$ bei der Berechnung der Lösung auf einer Querströmungsebene k näherungsweise mit den Größen der Ebene k-1 gebildet.

## 4. Implementierung des Verfahrens

Das beschriebene Rechenverfahren ist im Rahmen dieser Arbeit in Fortran IV programmiert und auf der Rechenanlage der Ruhr-Universität Bochum (bis 31.8.81: AEG Telefunken TR 440, danach : CDC CYBER 175) erprobt worden. Alle Beispielrechnungen sind auf diesen Anlagen durchgeführt worden. Das Rechenprogramm liegt am Lehrstuhl für Fluidenergiemaschinen der Universität Bochum vor.

Der folgende Abschnitt behandelt die programmtechnische Seite des Rechenverfahrens. Dies betrifft Punkte wie die Ausnutzung bestimmter Eigenschaften der Gleichungssysteme zur Speicherplatz- und Rechenzeitoptimierung und die Betrachtung des Einflusses von bei der Lösung der Systeme auftretenden numerischen Fehlern.

### 4.1. Behandlung der auftretenden linearen Gleichungssysteme

#### 4.1.1. Struktur der Gleichungssysteme

Für jede der drei Impulsgleichungen ergibt sich jeweils ein eindeutig lösbares lineares Gleichungssystem. Wie in Abschnitt 3.3. erwähnt, kommen in jeder einzelnen Gleichung dieser Systeme jeweils fünf Unbekannte vor, deren Stützstellen in der Querströmungsebene benachbart liegen (Bild 3.7). Dies ent-

spricht der Situation bei anderen Differenzenverfahren /14/. Aufgrund dieser Tatsache erhält die Koeffizientenmatrix eines solchen linearen Systems eine Bandstruktur, deren genaue Form jedoch von der (programminternen) Numerierung der Unbekannten abhängig ist. Außerdem hängt die Form der Matrix von der Art der Randbedingungen ab.

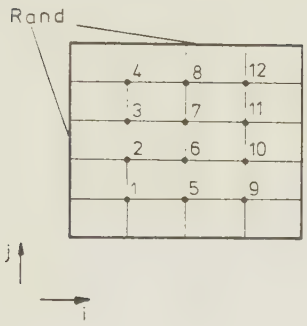
Am Beispiel einer Querströmungsebene mit 3 x 4 Gitterpunkten (12 Unbekannte) ist dies in Bild 4.1 oben für einen allseits geschlossenen Kanal und unten für den Fall der Randbedingung „periodische Wiederholung" (siehe Abschnitt 3.7) dargestellt. Entsprechend der im Bild links angegebenen Numerierung der Gitterpunkte und damit der Unbekannten ergibt sich jeweils die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems. Die Koeffizienten $K_1$ bis $K_6$ sind darin zusätzlich mit einem Hochindex versehen, der die jeweilige Unbekannte kennzeichnet.

Es ist zu erkennen, daß die Bandbreite b der Matrix im Fall der Randbedingung „periodische Wiederholung" größer ist als im Fall des geschlossenen Kanals mit festen Wänden, da die Gleichungen für die Unbekannten am Rand des Gebietes Größen mit weit auseinander liegenden Nummern enthalten müssen. Die halbe Bandbreite entspricht dann annähernd der Anzahl der Unbekannten.

Die Bandstruktur kann bei der Abspeicherung der Matrizen ausgenutzt werden, wenn das Verfahren zur Lösung der Systeme günstig gewählt wird.

Neben Aussagen über die Gestalt der auftretenden Matrizen liefert die Analyse der numerischen Gleichungen außerdem

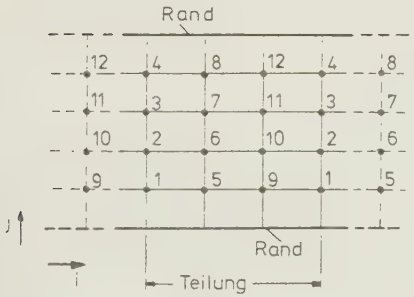
a) feste Berandung




b/2

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
-K_6^1 & K_3^1 & 0 & 0 & K_4^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
K_1^2 & -K_6^2 & K_3^2 & 0 & 0 & K_4^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & K_1^3 & -K_6^3 & K_3^3 & 0 & 0 & K_4^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & K_1^4 & -K_6^4 & 0 & 0 & 0 & K_4^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
K_2^5 & 0 & 0 & 0 & -K_6^5 & K_3^5 & 0 & 0 & K_4^5 & 0 & 0 & 0 \\
0 & K_2^6 & 0 & 0 & K_1^6 & -K_6^6 & K_3^6 & 0 & 0 & K_4^6 & 0 & 0 \\
0 & 0 & K_2^7 & 0 & 0 & K_1^7 & -K_6^7 & K_3^7 & 0 & 0 & K_4^7 & 0 \\
0 & 0 & 0 & K_2^8 & 0 & 0 & K_1^8 & -K_6^8 & 0 & 0 & 0 & K_4^8 \\
0 & 0 & 0 & 0 & K_2^9 & 0 & 0 & 0 & -K_6^9 & K_3^9 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_2^{10} & 0 & 0 & K_1^{10} & -K_6^{10} & K_3^{10} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_2^{11} & 0 & 0 & K_1^{11} & -K_6^{11} & K_3^{11} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_2^{12} & 0 & 0 & K_1^{12} & -K_6^{12}
\end{array}
$$

b) periodische Wiederholung




b/2

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
-K_6^1 & K_3^1 & 0 & 0 & K_4^1 & 0 & 0 & 0 & K_2^1 & 0 & 0 & 0 \\
K_1^2 & -K_6^2 & K_3^2 & 0 & 0 & K_4^2 & 0 & 0 & 0 & K_2^2 & 0 & 0 \\
0 & K_1^3 & -K_6^3 & K_3^3 & 0 & 0 & K_4^3 & 0 & 0 & 0 & K_2^3 & 0 \\
0 & 0 & K_1^4 & -K_6^4 & 0 & 0 & 0 & K_4^4 & 0 & 0 & 0 & K_2^4 \\
K_2^5 & 0 & 0 & 0 & -K_6^5 & K_3^5 & 0 & 0 & K_4^5 & 0 & 0 & 0 \\
0 & K_2^6 & 0 & 0 & K_1^6 & -K_6^6 & K_3^6 & 0 & 0 & K_4^6 & 0 & 0 \\
0 & 0 & K_2^7 & 0 & 0 & K_1^7 & -K_6^7 & K_3^7 & 0 & 0 & K_4^7 & 0 \\
0 & 0 & 0 & K_2^8 & 0 & 0 & K_1^8 & -K_6^8 & 0 & 0 & 0 & K_4^8 \\
K_4^9 & 0 & 0 & 0 & K_2^9 & 0 & 0 & 0 & -K_6^9 & K_3^9 & 0 & 0 \\
0 & K_4^{10} & 0 & 0 & 0 & K_2^{10} & 0 & 0 & K_1^{10} & -K_6^{10} & K_3^{10} & 0 \\
0 & 0 & K_4^{11} & 0 & 0 & 0 & K_2^{11} & 0 & 0 & K_1^{11} & -K_6^{11} & K_3^{11} \\
0 & 0 & 0 & K_4^{12} & 0 & 0 & 0 & K_2^{12} & 0 & 0 & K_1^{12} & -K_6^{12}
\end{array}
$$

Bild 4.1: Koeffizientenmatrizen bei verschiedenen Randbedingungen

Informationen über die betragsmäßige Größe der Matrixelemente.

Für jede einzelne Gleichung eines Systems zur Lösung der Impulsgleichungen ist nach Abschnitt 3.3. die Beziehung

$$K_6 = \frac{\Delta y \cdot \Delta z}{\Delta x} \cdot \nu \cdot Re^{VI}_{Git} + K_1 + K_2 + K_3 + K_4$$

erfüllt. Darin ist $K_6$ jeweils der Koeffizient der Hauptdiagonale, $K_1$ bis $K_4$ liegen in den vier Nebendiagonalen. Die Gleichungen (16) bzw. (19) zur Bestimmung der Koeffizienten $K_1$ bis $K_4$ zeigen, daß diese Faktoren stets größer oder im Extremfall gleich Null sind. Dies zeigt auch Bild 3.8 für den Koeffizienten $K_2$.

Der Term

$$\frac{\Delta y \cdot \Delta z}{\Delta x} \cdot \nu \cdot Re^{VI}_{Git}$$

ist ebenfalls immer größer als Null, da $Re^{VI}_{Git}$ mit der Geschwindigkeitskomponente in Durchflußrichtung gebildet wird (siehe Gleichung 15f), die als an jedem Ort positiv vorausgesetzt worden ist. Es gilt daher in jeder einzelnen Gleichung der Systeme zur Lösung der Impulsgleichungen

$$K_6 > K_1 + K_2 + K_3 + K_4$$

Dies bedeutet, daß die Elemente in der Hauptdiagonale der Matrix betragsmäßig größer als die Summe aller anderen in der gleichen Zeile stehenden Elemente sind; die Matrix ist daher hauptdiagonaldominant.

Das lineare Gleichungssystem (25) zur Berechnung der Druckkorrekturwerte läßt ebenfalls Aussagen über die betragsmäßige Größe der Elemente der auf Seite 52 definierten Matrix $\underline{T}$ zu. Das System besitzt entsprechend Gleichung (27) die gleiche Bandstruktur wie die Systeme zur Lösung der Impulsgleichungen entsprechend Bild 4.1. In jeder einzelnen Gleichung gilt hier für die im Abschnitt 3.4. eingeführten Koeffizien- $B_1$ bis $B_5$ ebenfalls

$$B_5 > B_1 + B_2 + B_3 + B_4 \ ,$$

wenn für die Durchflußkomponente $u > 0$ vorausgesetzt wird. Dies ist durch Betrachtung der in Anhang A3 vollständig dargestellten Gleichungen für die Koeffizienten $B_1$ bis $B_5$ zu erkennen. Da $B_5$ das Hauptdiagonalelement der Matrix $\underline{T}$ bildet, ist auch diese Matrix hauptdiagonaldominant.

Die Matrix $\underline{T}$ hat darüberhinaus die Eigenschaft der Symmetrie. Auf den Nachweis dieser Eigenschaft soll hier verzichtet werden, weil diese beim Aufstellen des Systems leicht zu erkennen ist.

### 4.1.2. Auswahl des Verfahrens zur Lösung der Gleichungssysteme

Die speziellen Eigenschaften der linearen Gleichungssysteme sollen nun als Kriterien zur Auswahl eines Lösungsverfahrens herangezogen werden. Zur Lösung von linearen Systemen stehen verschiedene Algorithmen zur Verfügung, die sich in direkte und indirekte Verfahren einteilen lassen. Die direkten Verfahren führen durch bestimmte Rechenschritte vorher bekannter Zahl zu einer exakten Lösung jedes lös-

baren Systems. Dagegen bestehen die indirekten Verfahren aus einer Iterationsvorschrift, die eine Folge von Vektoren erzeugt, die gegen den Lösungsvektor des Systems konvergiert, wenn die Koeffizientenmatrix bestimmte Bedingungen erfüllt.

4.1.2.1. Direkte Verfahren

Die allgemeinste Form der direkten Verfahren stellt der bekannte Gauss'sche Eliminationsprozeß dar. Dieser Algorithmus führt bei jedem System, für das die Determinante der Koeffizientenmatrix ungleich Null ist, zu der (bis auf Rundungsfehler) exakten Lösung.

Handelt es sich bei der Koeffizientenmatrix des betrachteten Systems um eine Bandmatrix, so läßt sich zeigen, daß alle während der Elimination auftretenden Matrixelemente auch wieder innerhalb desselben Bandes der Matrix liegen. Die platzsparende Speicherung der Matrix als Band ist also bei diesem Verfahren möglich. Innerhalb der Bandbreite der Matrix werden aber im Laufe des Prozesses alle Plätze belegt. Das zu speichernde Band muß also die volle Bandbreite der Matrix umfassen.

Da die Bandbreite bei Anwendung der Randbedingung „periodische Wiederholung" annähernd die vollständige Matrix umfaßt (Bild 4.1), ist in diesem Fall bei Anwendung der Gauss-Elimination keine nennenswerte Speicherplatzersparnis durch Ausnutzung der Bandstruktur möglich. Auch die Rechenzeit ist dann kaum geringer als bei der Auflösung eines Systems mit vollständig besetzter Matrix. Die spezielle Struktur der hier vorliegenden Matrizen kann also insbesondere im Fall der Randbedingung „periodische Wiederholung" nicht

ausgenutzt werden, wenn das direkte Verfahren angewendet wird.

4.1.2.2. Indirekte Verfahren

Die indirekten Verfahren liefern als Ergebnis eines iterativen Prozesses nur eine (beliebig genaue) Näherungslösung des Systems. Als allgemeinste Vertreter dieser Gruppe sind das SOR (succesive over-relaxation method) - und das JOR (Jacobi over-relaxation method) -Verfahren bekannt. Diese beiden Algorithmen sind durch das Einführen eines Relaxationsfaktors verallgemeinerte Formen des Gauss-Seidel-Verfahrens (Einzelschrittverfahren) bzw. des Gesamtschrittverfahrens, und gehen bei einem Wert des Relaxationsfaktors von Eins wieder in diese über /14/. Da das SOR-Verfahren Vorteile gegenüber dem JOR-Verfahren bietet (geringerer Speicherbedarf, höhere Konvergenzgeschwindigkeit, siehe /14/), ohne daß dafür zusätzliche Einschränkungen in Kauf genommen werden müssen, soll nur noch das SOR-Verfahren weiter betrachtet werden.

Anders als die Gauss-Elimination liefern die indirekten Verfahren nicht für jedes eindeutig auflösbare System eine Lösung, sondern nur dann, wenn die Matrix bestimmte Bedingungen erfüllt. So ist nach /11/ das sogenannte Zeilensummenkriterium eine für die Konvergenz der Verfahrens hinreichende Bedingung. Dieses Kriterium besagt, daß in jeder Zeile der Matrix der Betrag des Hauptdiagonalelementes größer sein muß als die Summe der Beträge aller anderen Elemente dieser Zeile. Nach den Überlegungen in Abschnitt 4.1.1 ist dies bei den hier vorliegenden Systemen erfüllt, wenn die Geschwindigkeitskomponente in Durchflußrichtung an jeder Stelle grö-

ßer als Null ist. Auch ein indirektes Verfahren ist also prinzipiell hier anwendbar. Im Folgenden werden Gründe dafür angeführt, daß das SOR-Verfahren und nicht die Gauss-Elimination in dem Rechenmodell eingesetzt wird.

Der wichtigste Vorteil des iterativen Verfahrens besteht darin, daß auch im Fall periodischer Randbedingungen nur die Elemente der Koeffizientenmatrix, die ungleich Null sind, abgespeichert werden müssen, da die Matrix im Laufe der Iteration nicht geändert wird. Sie wird zwar in der Iterationsvorschrift benutzt, steht aber nach erfolgter Lösung noch in der gleichen Form zur Verfügung. Es werden keine Größen neu gebildet, die einen weiteren Speicherplatz benötigen. Da jede Gleichung jeweils fünf Unbekannte enthält, läßt sich die Matrix als Band mit 5 x n Elementen speichern, wenn n die Anzahl der Unbekannten eines Systems ist. Auch die zwischen den besetzten Diagonalen auftretenden Nullelemente, die beim Eliminationsverfahren auf jeden Fall gespeichert werden müssen, können hier wegfallen. Erwünscht ist ebenfalls, daß der Speicherplatz nur linear mit der Anzahl der Unbekannten steigt.

Auch der Vergleich der Anzahl der zur Lösung eines Systems benötigten Rechenoperationen spricht für das SOR-Verfahren. Nach /11/ sind bei Benutzung des direkten Verfahrens

$$Z_n = \frac{n}{3} \cdot (n^2 + 3n - 1)$$

Punktoperationen notwendig, wenn n Unbekannte zu berechnen sind. Beim SOR-Verfahren hängt die Zahl der Rechenoperationen von der Anzahl der Iterationen und damit von der geforderten Genauigkeit ab. Hier gilt

$$Z_n = n \cdot (1 + 6k)$$

wenn k die Zahl der durchgeführten Iterationen bedeutet.

In Bild 4.2 sind diese Zusammenhänge veranschaulicht. Über der Größe des Systems (n = Anzahl der Unbekannten) ist die Anzahl der zur Lösung erforderlichen Punktoperationen $Z_n$

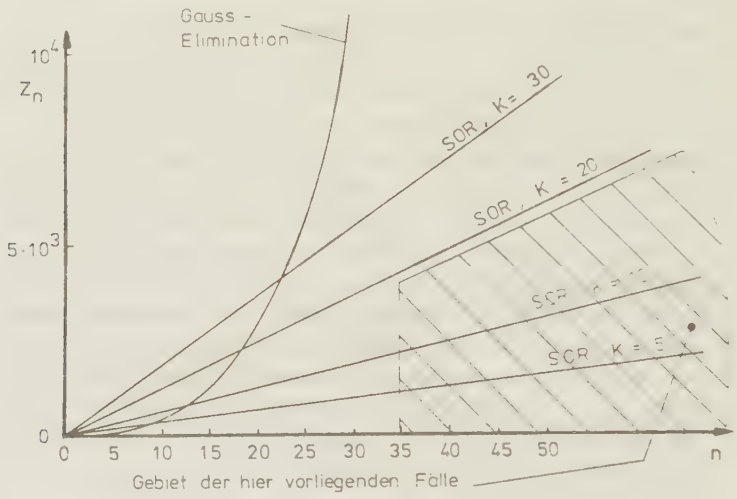



Bild 4.2: Anzahl der benötigten Rechenoperationen für Gauss-Elimination und SOR-Verfahren

sowohl für die Gauss-Elimination als auch für das SOR-Verfahren aufgetragen, wobei im Fall des SOR-Verfahrens die Iterationszahl k einen Parameter darstellt. Da in der Regel Systeme mit mehr als etwa 35 Unbekannten gelöst werden müssen und die Zahl der benötigten Iterationen nach den Erfahrungen mit dem Programm bei ausreichender Genauigkeit immer unter 20 lag, kann ein Gebiet eingezeichnet werden, das die hier vorliegenden Fälle enthält. In diesem Gebiet ist das SOR-Verfahren der Gauss-Elimination deutlich in der Rechenzeit überlegen.

Der nächste Punkt betrifft die Genauigkeit der Lösung eines Gleichungssystems, die bei dem iterativen Verfahren von der vorgegebenen Fehlerschranke, bei der die Iteration abgebrochen werden soll, abhängt. Eine genauere Lösung des Systems bedeutet in diesem Fall also eine höhere Rechenzeit. Die Eliminationsmethode errechnet dagegen immer die exakte Lösung. Die Anwendung des iterativen Verfahrens eröffnet daher die Möglichkeit, die Systeme jeweils nur so genau wie nötig zu lösen. Damit kann die Genauigkeit der Lösung der Systeme im Laufe der gesamten Rechnungsprozedur den gerade erforderlichen Verhältnissen angepaßt werden. Zu Beginn der Rechnung ist eine sehr genaue Lösung der Gleichungssysteme unnötig, weil die Gleichungssysteme selbst in einem äußeren Iterationsprozeß ständig neu aufgestellt werden. Erst mit zunehmender Konvergenz der äußeren Iteration wird eine exaktere Lösung der Gleichungssysteme notwendig. Aus diesem Grunde ist eine Anpassung der dem SOR-Verfahren vorgegebenen Lösungsgenauigkeit an den in der äußeren Iteration noch auftretenden Fehler sinnvoll. Allerdings darf die Lösung der Systeme zu keiner Zeit so ungenau sein, daß die Konvergenz der äußeren Iteration dadurch gestört wird (siehe dazu Abschnitt 4.1.3).

Da das SOR-Verfahren die Lösung iterativ findet, ist die Vorgabe eines günstigen Startwertes, also einer ersten Schätzung des Lösungsvektors ein weiteres mögliches Mittel zur Verringerung der Zahl der bis zum Erreichen einer gewissen Genauigkeit benötigten Iterationen. Im Falle der hier auftretenden Systeme steht immer ein guter Schätzwert zur Verfügung: da die Rechenschrittweite in Durchflußrichtung möglichst so gewählt wird,daß sich die Strömungsgrößen von einer Querströmungsebene k zur nächsten nicht zu stark ändern, sind die Werte von der stromaufwärts benachbarten Ebene ein günstiger Startwert für die Iteration. Hier wird also eine bereits vorhandene Information ausgenutzt, die

dem Gauss-Eliminationsverfahren nicht zur Verfügung gestellt werden kann.

Das iterative SOR-Verfahren kommt also hier zur Anwendung. Da die Gleichungssysteme dann nicht exakt gelöst werden, muß untersucht werden, welche Genauigkeit der Lösungen gefordert werden muß, um die Konvergenz der äußeren Iteration nicht zu verhindern.

4.1.3. Benötigte Genauigkeit des SOR-Lösungsverfahrens

Die Genauigkeit der Lösungen der Gleichungssysteme muß so hoch sein, daß die vorgegebene Genauigkeitsschranke der äußeren Iteration trotz des Restfehlers überhaupt erreicht werden kann. Wie im folgenden gezeigt wird, ist dies gewährleistet, wenn die vorgegebene Genauigkeitsschranke der Gleichungssystemlösungen in einem bestimmten Verhältnis zur Genauigkeitsschranke der äußeren Iteration steht.

Die äußere Iteration wird dann abgebrochen, wenn die Fehler in allen lokalen Massenbilanzen des räumlichen Lösungsgebietes eine gewisse Größe nicht mehr überschreiten. Dieses Konvergenzkriterium wurde in dem vorliegenden Rechenprogramm wie folgt gewählt: auf jeder Querströmungsebene k werden die lokalen Massenbilanzen für alle Kontrollräume dieser Ebene nach Gleichung (20) gebildet. Die Beträge der dabei berechneten Massenbilanzfehler $|\Delta\dot{V}(i,j)|$ werden addiert. Diese Summe darf, bezogen auf den gesamten Volumenstrom durch den Kanal, auf keiner Ebene k die Größe $\varepsilon$ überschreiten. Es gilt daher für jede Ebene k

$$\frac{\sum_{l=1}^{r} |\Delta\dot{V}(i,j)|_l}{\dot{V}} < \varepsilon \,. \qquad (32)$$

Dabei ist r die Anzahl der Kontrollräume einer Querströmungsebene, $\dot{V}$ ist der Volumenstrom durch den betrachteten Kanal.

Wird bei der Lösung der Gleichungssysteme zur Berechnung der Geschwindigkeiten die Grenze für den Abbruch der SOR-Iteration mit dem Wert $\varepsilon_c$ angegeben, um den sich eine Lösung noch von dem exakten Wert unterscheiden darf, so gilt für alle in den lokalen Massenbilanzen auftretenden Geschwindigkeiten $c_n$ im

ungünstigsten Fall

$$c_n = c_n^* \pm \varepsilon_c \,, \tag{33}$$

wobei $c_n^*$ die exakte Lösung ist. Es können sich daher entsprechende Fehler in den Massenbilanzen einstellen, die bei ungünstigem Wert von $\varepsilon_c$ das Erreichen des Konvergenzkriteriums der äußeren Iteration verhindern. Um diesen Fall auszuschließen, sei folgende Abschätzung gegeben: die lokale Massenbilanz für den Kontrollraum um einen Gitterpunkt (i,j,k) läßt sich (entsprechend Gleichung (20)) schreiben als

$$\sum_{n=1}^{6} A_n \cdot c_n = \Delta\dot{V}(i,j) \tag{34}$$

Die $A_n$ stellen die sechs einen Kontrollraum umgebenden Begrenzungsflächen, die $c_n$ die zugehörigen Normalgeschwindigkeiten dar. $\Delta\dot{V}(i,j)$ ist der Fehler der Massenbilanz dieses Kontrollraumes.

Aus (33) und (34) folgt:

$$\Delta\dot{V}(i,j) = \sum_{n=1}^{6} A_n \cdot (c_n^* \pm \varepsilon_c) = \sum_{n=1}^{6} A_n \cdot c_n^* + \sum_{n=1}^{6} A_n \cdot (\pm\varepsilon_c)$$

Dabei stellt der erste der beiden Terme auf der rechten Seite den exakten Wert, der zweite den durch ungenaue numerische Lösung der Gleichungssysteme entstandenen Fehler dar. Bei der Berechnung von $\Delta\dot{V}(i,j)$ wird in einem Kontrollraum also der Fehler

$$\varepsilon_{KR} = \sum_{n=1}^{6} \pm A_n \cdot \varepsilon_c$$

gemacht. Obwohl die Vorzeichen der Fehler $\varepsilon_c$ nicht bekannt sind, kann man sagen, daß sich alle Fehler im ungünstigsten Fall addieren. Es gilt daher:

$$|\varepsilon_{KR}| \leq \sum_{n=1}^{6} A_n \cdot |\varepsilon_c| = |\varepsilon_c| \cdot \sum_{n=1}^{6} A_n$$

Die Betragstriche bei $\varepsilon_c$ können weggelassen werden, wenn man vereinbart, daß dem Programm zur Lösung der Gleichungssysteme der Wert $\varepsilon_c$ positiv vorgegeben wird.

Bezeichnet man die gesamte Oberfläche des betrachteten Kontrollraumes mit $A_{KR}$, so gilt

$$A_{KR} = \sum_{n=1}^{6} A_n \,.$$

Daher folgt:

$$|\varepsilon_{KR}| \leq \varepsilon_c \cdot A_{KR}$$

Da bei der Berechnung eines jeden Wertes $\Delta\dot{V}(i,j)$ ein numerischer Fehler $\varepsilon_{KR}$ gemacht wurde, ist die linke Seite des Konvergenzkriteriums für die äußere Iteration (32) nun mit dem Fehler

$$\varepsilon_{aus} = \frac{\sum_{l=1}^{r} |\varepsilon_{KR}|}{\dot{V}} \leq \frac{\sum_{l=1}^{r} \varepsilon_c \cdot A_{KR}}{\dot{V}} = \frac{\varepsilon_c}{\dot{V}} \cdot \sum_{l=1}^{r} A_{KR}$$

behaftet. Das Gleichheitszeichen gilt im ungünstigsten Fall, wenn die gegenseitige Auslöschung von Fehlern ausgeschlossen wird. Damit ist bekannt, welcher Fehler bei der Berechnung

des Konvergenzkriteriums der äußeren Iteration aufgrund der numerischen Ungenauigkeit $\varepsilon_c$ höchstens gemacht wird. Ist der Wert von $\varepsilon_{aus}$ größer als $\varepsilon$, so ist keine Konvergenz der äußeren Iteration möglich. Es soll deshalb gefordert werden, daß $\varepsilon_{aus}$ klein gegen $\varepsilon$ ist:

$$\varepsilon_{aus} << \varepsilon$$

bzw.

$$\frac{\varepsilon_c}{\dot{V}} \cdot \sum_{l=1}^{r} A_{KR} << \varepsilon \qquad (35)$$

Wenn diese Forderung erfüllt ist, ist die numerische Genauigkeit der Lösung der Gleichungssysteme hoch genug. Deshalb wird (35) zur Bestimmung der Fehlerschranke $\varepsilon_c$ im SOR-Verfahren benutzt.

Im Fall eines in kartesischen Koordinaten beschriebenen Kanals mit festen Wänden und konstanter Gitterweite $\Delta x$, $\Delta y$ und $\Delta z$ soll dieses Kriterium zur Veranschaulichung noch vereinfacht werden. Wenn x wieder die Koordinate der Durchflußrichtung darstellt so gilt:

$$\frac{\varepsilon_c}{\dot{V}} \cdot \sum_{l=1}^{r} A_{KR} = \frac{\varepsilon_c}{\dot{V}} \cdot \sum_{l=1}^{r} (2\cdot\Delta y\cdot\Delta x + 2\cdot\Delta y\cdot\Delta z + 2\cdot\Delta x\cdot\Delta z)$$

$$= \frac{\varepsilon_c}{\dot{V}} \cdot 2\cdot r\cdot(\Delta y\cdot\Delta x + \Delta y\cdot\Delta z + \Delta x\cdot\Delta z) \quad ,$$

da die Oberfläche eines Kontrollraumes $A_{KR}$ durch

$$A_{KR} = 2\cdot\Delta y\cdot\Delta x + 2\cdot\Delta y\cdot\Delta z + 2\cdot\Delta x\cdot\Delta z$$

ausgedrückt werden kann und alle Kontrollräume der Querströmungsebene gleich groß sind. Ersetzt man den Volumen-

strom $\dot{V}$ durch die kontinuitätsgemittelte Durchströmgeschwindigkeit $\bar{u}$ und die durchströmte Fläche $r \cdot \Delta y \cdot \Delta z$ so gilt:

$$\dot{V} = \bar{u} \cdot r \cdot \Delta y \cdot \Delta z$$

Eingesetzt folgt:

$$\frac{\varepsilon_c}{\dot{V}} \cdot 2 \cdot r \cdot (\Delta y \cdot \Delta x + \Delta y \cdot \Delta z + \Delta x \cdot \Delta z) = 2 \cdot \frac{\varepsilon_c}{\bar{u}} \cdot (1 + \frac{\Delta x}{\Delta y} + \frac{\Delta x}{\Delta z})$$

Das Kriterium (35) lautet in diesem Fall also

$$2 \cdot \frac{\varepsilon_c}{\bar{u}} \cdot (1 + \frac{\Delta x}{\Delta z} + \frac{\Delta x}{\Delta y}) \ll \varepsilon \quad .$$

Da man aus dieser Beziehung $\varepsilon_c$ bestimmen möchte, folgt durch Umstellen:

$$\varepsilon_c \ll \frac{\varepsilon \cdot \bar{u}}{(1 + \frac{\Delta x}{\Delta z} + \frac{\Delta x}{\Delta y}) \cdot 2} \qquad (36)$$

Wird der so abgeschätzte Wert $\varepsilon_c$ bei der iterativen Lösung der Gleichungssysteme als Genauigkeitsschranke vorgegeben, so ist sichergestellt, daß die äußere Iteration trotz der numerischen Fehler des SOR-Algorithmus zur Konvergenz gelangt.

Gleichung (36) zeigt, daß z.B. bei einem Gitter mit $\Delta x = \Delta y = \Delta z$ die auf die mittlere Geschwindigkeit $\bar{u}$ bezogene Genauigkeitsschranke $\varepsilon_c/\bar{u}$ zu

$$\frac{\varepsilon_c}{\bar{u}} \ll \frac{\varepsilon}{6}$$

gesetzt werden sollte.

## 4.2. Behandlung der Geometrie

Bei der Ableitung der grundlegenden Gleichungen des Rechenverfahrens wurde in Abschnitt 3.1. mit Hilfe des Gauss'schen Integralsatzes die räumliche Integration über einen Kontrollraum durch eine Integration über die Oberfläche dieses Raumes ersetzt. Diese Integration über die Oberfläche ist nur dann in der dort beschriebenen einfachen Weise ausführbar, wenn es sich bei den Begrenzungsflächen des Kontrollraumes um Koordinatenflächen handelt. Nur auf Flächen, auf denen jeweils eine Koordinate konstant ist, entspricht die Normalgeschwindigkeit auf dieser Fläche genau einer Geschwindigkeitskomponente und nicht einer Kombination mehrerer Komponenten. Diese Tatsache führt zu einer Einschränkung der beschreibbaren Geometrien, da ein Lösungsgebiet stets von Koordinatenflächen begrenzt sein muß. Durch die Wahl eines geeigneten Koordinatensystems ist diese Einschränkung jedoch weitgehend auszugleichen.

Werden die Bewegungsgleichungen in kartesischen Koordinaten formuliert, so ist als Lösungsgebiet nur ein gerader Kanal mit Rechteckquerschnitt möglich. Um einen gekrümmten Kanal zu erhalten, werden Koordinatensysteme mit Winkelkoordinaten verwendet. So ergibt die Formulierung in Zylinderkoordinaten $r,\varphi,z$ einen gekrümmten Kanal mit Rechteckquerschnitt (siehe Bild 3.11).

Zur Beschreibung der Geometrie von rotationssymmetrischen Turbomaschinenkanälen ist die Benutzung eines Systems von Toruskoordinaten vorteilhaft und wird deshalb in der hier vorgestellten Programmfassung ausschließlich angewendet. Das System enthält zwei Winkelkoordinaten $\psi$ und $\varphi$ (Bild 4.3). Als dritte Koordinate dient der Radius r. Der Abstand R des $r,\psi$ - Polarsystems von der Mittellinie ist ein fester Parameter des Koordinatensystems. Durch solche Koordinaten ist z.B. die $180^{\circ}$- Umlenkung eines Radialverdichter-Rückführka-

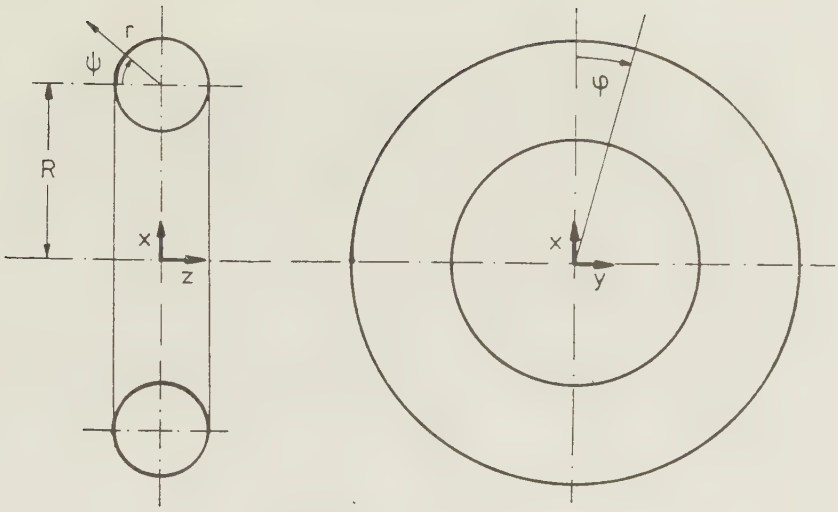



Bild 4.3: Toruskoordinatensystem

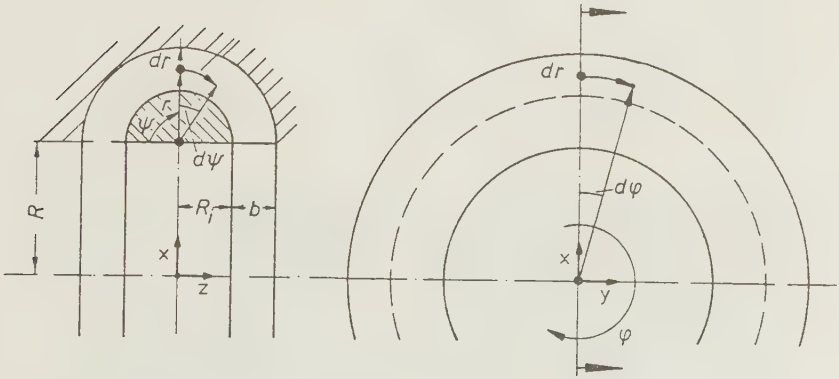



Bild 4.4: 180°- Umlenkung eines Rückführkanals

nals mit konstanter Krümmung und Breite beschrieben. Bild 4.4 zeigt eine solche Anwendung. Die $\psi$-Richtung stellt dabei die Durchflußrichtung dar. Für die Umlenkung einer radial auswärts in eine radial einwärts gerichtete Strömung variiert der Winkel $\psi$ gerade zwischen $0^{\circ}$ und $180^{\circ}$.

Eine Besonderheit eines solchen Kanals ist die Tatsache, daß sich der durchströmte Querschnitt mit der Koordinate $\psi$ ändert, obwohl die Breite b des Kanals im Meridianschnitt konstant bleibt. Allgemein erhält man für den durchströmten Querschnitt A einer Teilung, die durch den Winkelausschnitt $\Delta\varphi$ definiert ist

$$A(\psi) = b \cdot \Delta\varphi \cdot (R + (R_i + b/2) \cdot \sin \psi ) \ .$$

Diese Fläche nimmt zu im Bereich $0^{\circ} < \psi < 90^{\circ}$ und wird dann wieder kleiner für $90^{\circ} < \psi < 180^{\circ}$. Das Flächenverhältnis von größter zu kleinster durchströmter Fläche dieser $180^{\circ}$-Umlenkung beträgt somit

$$\frac{A(\psi = 90^{\circ})}{A(\psi = 0^{\circ})} = \frac{R + R_i + b/2}{R} = 1 + \frac{R_i + b/2}{R}$$

Es liegt also eine Verzögerung und dann eine Beschleunigung des Strömungsmediums aufgrund des Querschnittsverlaufs vor, die umso geringer wird, je größer der Radius R im Verhältnis zu den Größen $R_i$ und b wird.

Die Gleichungen, die die Transformation zwischen kartesischen Koordinaten (x,y,z) und Toruskoordinaten $(r,\psi,\varphi)$ beschreiben, sind im Anhang A1 angegeben. Dort sind auch die Navier-Stokes-Bewegungsgleichungen aufgeführt, die man aufgrund dieser Transformation erhält.

Um in der Gestaltung berechenbarer Kanalformen flexibler

zu werden, wird von der Möglichkeit Gebrauch gemacht, daß nicht alle Teile des Lösungsgebietes im gleichen Koordinatensystem beschrieben werden müssen. Durch Aneinandersetzen von einzelnen Teilen, die in verschiedenen Systemen dargestellt sind, können viele Formen nachgebildet werden. Bild 4.5 zeigt ein zweiteiliges Lösungsgebiet, dessen Teil-

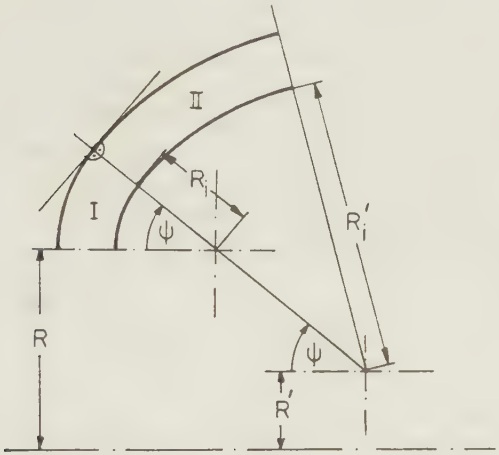



Bild 4.5: Aneinandersetzen von Teilelementen

stücke auf zwei versetzte Toruskoordinatensysteme bezogen sind. Da der Radius R des ersten Teils I größer ist als der Radius R' des Teils II, ist der Krümmungsradius $R_i$ in Teil I kleiner und damit die Krümmung stärker.

Damit beim Übergang zwischen verschiedenen Teilen kein Knick der Kanalwand auftritt, müssen die Teile wie in Bild 4.5 so aneinander grenzen, daß die Übergangsbedingung

$$R' = R - \frac{R_i' - R_i}{\sin \psi}$$

erfüllt ist. Darin ist $\psi$ der Winkel, beim dem der Übergang erfolgt. Bei Einhalten dieser Bedingung ergibt sich an der Übergangsstelle eine eindeutige Tangente.

Durch das Aneinanderfügen solcher Teilstücke ist eine Vielfalt von Geometrien darstellbar. Eine Auswahl von Beispielen zeigt Bild 4.6. Alle diese Kanäle sind im Meridianschnitt dargestellt. Sie haben eine weitere (gleichmäßige) Krümmung in Umfangsrichtung senkrecht zur Zeichenebene und sind in dieser Richtung in sich selbst geschlossen. Im Rechenprogramm werden die verschiedenen Krümmungsradien $R_i$ im Meridianschnitt für die einzelnen Teilstücke vorgegeben. Die Festlegung der zugehörigen Koordinatensysteme mit den Parametern R geschieht dann automatisch im Rechner mit Hilfe der angegebenen Übergangsbedingung.

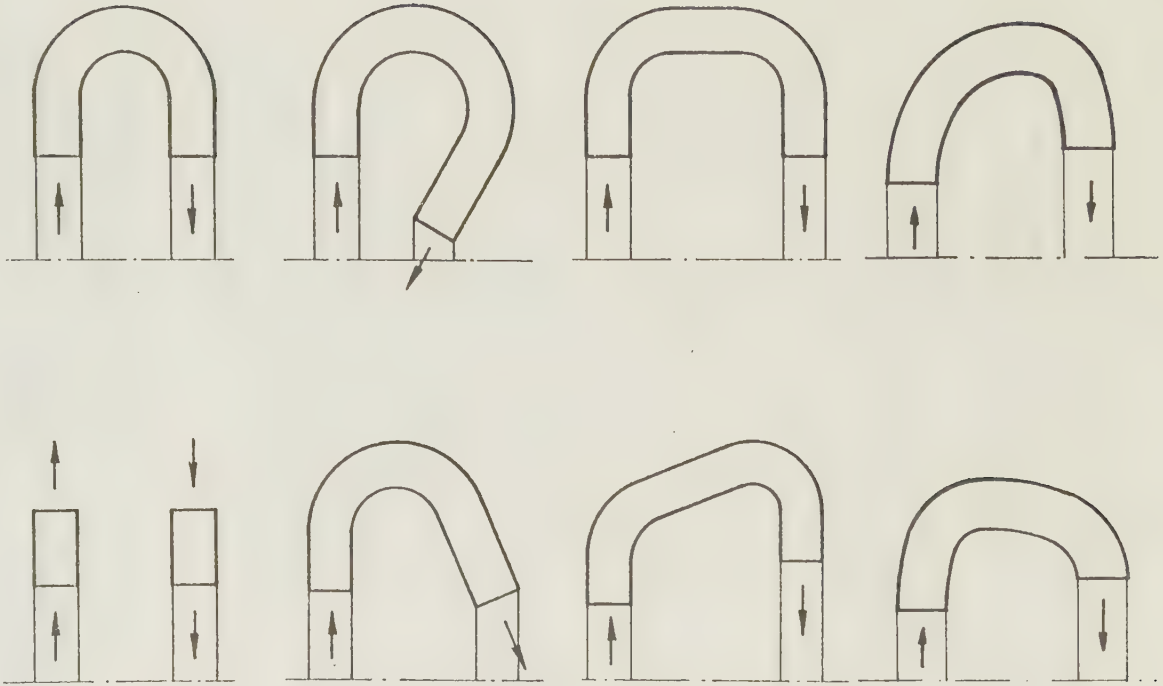


Bild 4.6: Beispiele für mögliche Kanalformen

## 4.3. Ablaufschema des Rechenprogramms

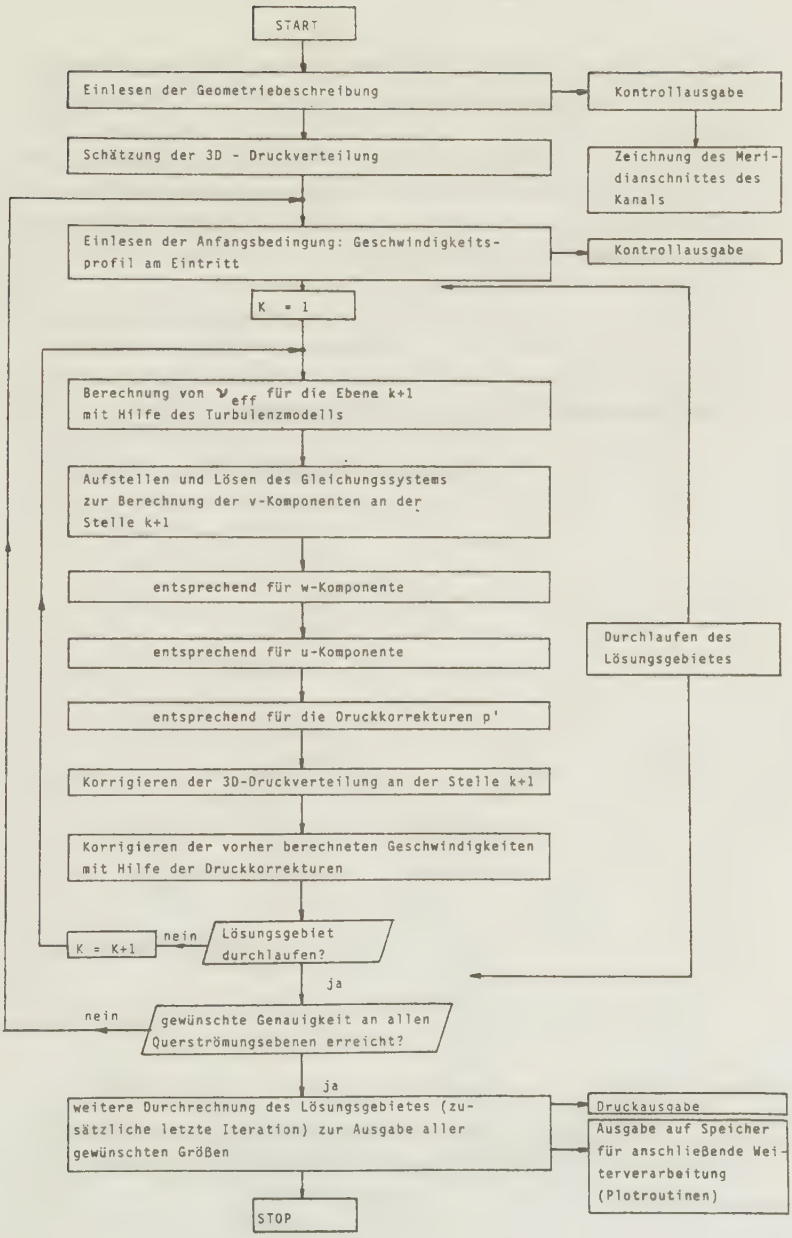
Auf der folgenden Seite ist ein Flußdiagramm mit den wesentlichen Teilen des Programmablaufs dargestellt.

Nach dem Start des Programms folgt das Einlesen der Daten, die die Geometrie des Lösungsgebietes beschreiben. Zur Kontrolle werden diese Daten vom Rechner wieder ins Ablaufprotokoll ausgegeben. Außerdem erfolgt gegebenenfalls die Ausgabe einer Zeichnung des Meridianschnittes des betrachteten Kanals, wobei gleichzeitig das gewählte Gitternetz dargestellt wird.

Die folgende Schätzung der dreidimensionalen Druckverteilung kann entweder aus früheren Rechnungen stammen, also hier eingelesen werden, oder neu bestimmt werden.

Nun beginnt, ausgehend von der eingelesenen Anfangsbedingung, das schrittweise Durchlaufen des Lösungsgebietes. Zunächst wird mit Hilfe des Turbulenzmodells die Verteilung der effektiven Zähigkeit $\nu_{eff}$ für die Ebene k+1 bestimmt. Dann folgt das Aufstellen und Lösen der drei Gleichungssysteme für die Geschwindigkeitskomponenten auf der Ebene k+1, die Bestimmung der Druckkorrekturen p' und das Korrigieren der Druck- und Geschwindigkeitsverteilung auf dieser Ebene mit Hilfe der Korrekturen. Diese korrigierte Geschwindigkeitsverteilung ist dann Ausgangspunkt für den Schritt auf die Ebene k+2. Die Zählgröße k wird solange erhöht, bis die letzte Querströmungsebene erreicht ist.

Nach der Durchrechnung des Lösungsgebietes muß festgestellt werden, ob die erreichte Genauigkeit bereits groß genug ist. Ist dies nicht der Fall, erfolgt ein erneuter Durchlauf, wieder ausgehend von dem Geschwindigkeitsprofil am Eintritt, aber unter Benutzung einer neuen Druckverteilung. Bei Errei-


START
Einlesen der Geometriebeschreibung
Kontrollausgabe
Schätzung der 3D - Druckverteilung
Zeichnung des Meridianschnittes des Kanals
Einlesen der Anfangsbedingung: Geschwindigkeitsprofil am Eintritt
Kontrollausgabe
K = 1
Berechnung von $\nu_{eff}$ für die Ebene k+1 mit Hilfe des Turbulenzmodells
Aufstellen und Lösen des Gleichungssystems zur Berechnung der v-Komponenten an der Stelle k+1
entsprechend für w-Komponente
entsprechend für u-Komponente
entsprechend für die Druckkorrekturen p'
Durchlaufen des Lösungsgebietes
Korrigieren der 3D-Druckverteilung an der Stelle k+1
Korrigieren der vorher berechneten Geschwindigkeiten mit Hilfe der Druckkorrekturen
K = K+1
nein
Lösungsgebiet durchlaufen?
ja
nein
gewünschte Genauigkeit an allen Querströmungsebenen erreicht?
ja
weitere Durchrechnung des Lösungsgebietes (zusätzliche letzte Iteration) zur Ausgabe aller gewünschten Größen
Druckausgabe
Ausgabe auf Speicher für anschließende Weiterverarbeitung (Plotroutinen)
STOP

chen der Genauigkeitsschranke wird eine letzte Durchrechnung des Lösungsgebietes durchgeführt, um alle berechneten Größen, die ja bis auf den Druck nicht dreidimensional gespeichert sind, ausgegeben zu können. Die Ausgabe erfolgt ins Ablaufprotokoll und parallel auf Speichermedien, die die Daten für eine anschließende Weiterverarbeitung, z.B. durch Plotprogramme, bereit halten.

Zur Darstellung der Ergebnisse sind Zeichenprogramme vorhanden, die Isotachen und Isobaren für beliebige Querströmungsebenen zeichnen. Außerdem ist die Darstellung der Sekundärgeschwindigkeiten in Vektordiagrammen möglich.

## 5. Vergleich mit exakten Lösungen der Navier-Stokes-Gleichungen

Zur Überprüfung der Genauigkeit des Rechenverfahrens und zum Auffinden eventueller Fehler in der Programmierung, die aufgrund der komplizierten Form der Bewegungsgleichungen in Toruskoordinaten (siehe Anhang A1) auftreten könnten, sind Vergleiche mit exakten Lösungen der Differentialgleichungen angestellt worden.

Die Kanäle, deren Durchströmung numerisch berechnet werden kann, sind auf die in Abschnitt 4.2 beschriebenen Formen beschränkt. Sie müssen also durch Koordinatenflächen von Toruskoordinatensystemen nachgebildet werden können. Für diese Formen müssen exakte Navier-Stokes-Lösungen gesucht werden.

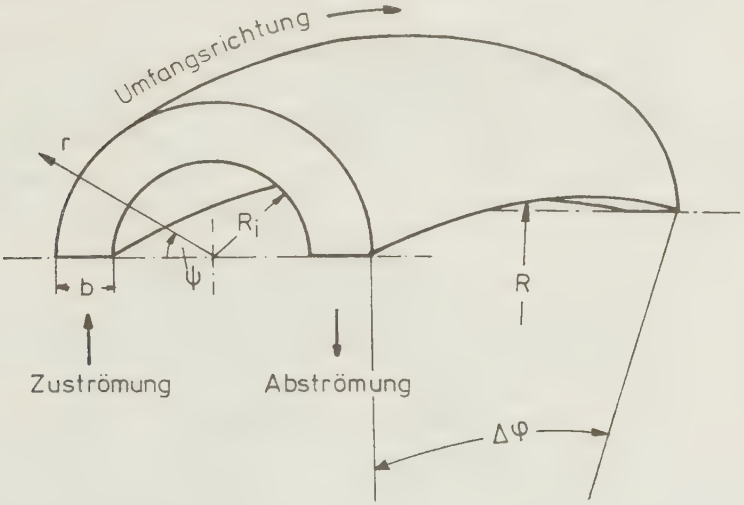



Bild 5.1: Durch Koordinatenflächen eines Toruskoordinatensystems festgelegter Strömungskanal

Bild 5.1 zeigt in perspektivischer Darstellung einen Strömungskanal, der durch die Koordinatenflächen eines Torus-koordinatensystems $(r,\psi,\varphi)$ gebildet wird. Der Winkel $\Delta\varphi$ entspricht gerade dem Teilungswinkel, d.h. aufgrund der Randbedingung der periodischen Wiederholung der Strömungsgrößen in Umfangsrichtung wiederholt sich dieselbe dreidimensionale Geschwindigkeits- und Druckverteilung jeweils nach dem Winkel $\Delta\varphi$. Der Radius R wird von der Maschinenachse aus gemessen (siehe dazu auch Bild 4.4), $R_i$ stellt den im Meridianschnitt auftretenden Krümmungsradius dar.

Variationen dieser geometrischen Anordnung führen zu unterschiedlichen exakt lösbaren Strömungsfällen, von denen drei zur Überprüfung des Verfahrens hier dargestellt werden sollen.

## 5.1. Der Potentialwirbel

Läßt man in Bild 5.1 den Radius R sehr groß werden und gleich-

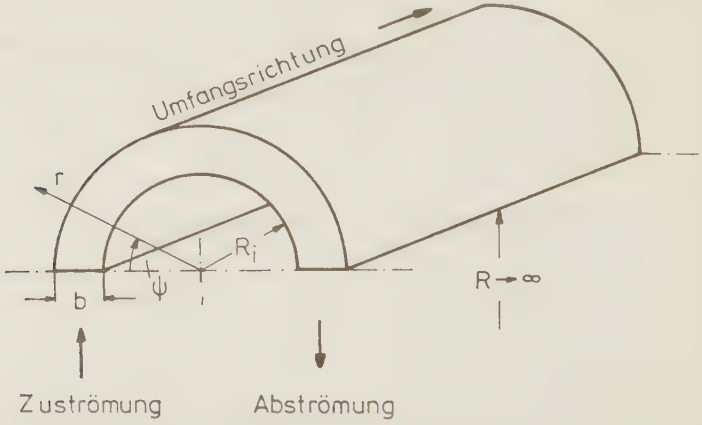



Bild 5.2: Kanalform für $R \to \infty$

zeitig den Teilungswinkel $\Delta\varphi$ schrumpfen, so daß das Produkt $R \cdot \Delta\varphi$, das die Länge des Kanals in Umfangsrichtung darstellt, einen konstanten Wert behält, so geht der Kanal aus Bild 5.1 in die Form nach Bild 5.2 über. Der Kanal ist dann im Extremfall $R \to \infty$ nicht mehr in Umfangsrichtung gekrümmt. Die Toruskoordinaten $(r,\psi,\varphi)$ gehen für diesen Fall in Zylinderkoordinaten über, was durch einen entsprechenden Grenzübergang in den Differentialgleichungen aus Anhang A1 nachgewiesen werden kann.

Wird am Eintritt dieses Kanals ein Geschwindigkeitsprofil vorgegeben, das sich nur über der Kanalbreite b, aber nicht in Umfangsrichtung verändert, so wird trotz der dreidimensionalen Anordnung eine ebene Strömung simuliert, da durch die Randbedingung der periodischen Wiederholung eine in Umfangsrichtung ins Unendliche fortgesetzte und sich in dieser Richtung nicht verändernde Strömung vorliegt.

Der Potentialwirbel stellt eine solche ebene Strömung dar. Er ist eine exakte Lösung der Bewegungsgleichungen für den reibungsfreien Fall. Die Geschwindigkeits- und Druckverteilung ergibt sich für diese Strömung, wenn in den partiellen Differentialgleichungen aus Anhang A1 folgende Voraussetzungen getroffen werden:

- Reibungsfreiheit $(\nu = 0)$
- keine Krümmung in Umfangsrichtung $(R \to \infty)$
- keine Querströmung $(w_r = 0$ und $w_\varphi = 0)$

Die Gleichungen erhalten dann die Form:

$$\frac{w_\psi^2}{r} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} \qquad \text{(r-Richtung)} \qquad (37a)$$

$$\frac{w_\psi}{r}\cdot\frac{\partial w_\psi}{\partial \psi} = -\frac{1}{\rho\cdot r}\cdot\frac{\partial p}{\partial \psi} \qquad (\psi\text{-Richtung}) \qquad (37b)$$

$$0 = 0 \qquad (\varphi\text{-Richtung}) \qquad (37c)$$

$$\frac{\partial w_\psi}{r\cdot\partial \psi} = 0 \qquad \text{(Kontinuitäts-gleichung)} \qquad (37d)$$

und haben die Lösung

$$w_\psi = \frac{c_1}{r} = w_\psi(r) \qquad (38a)$$

$$p = p_o - \frac{\rho}{2}\cdot w_\psi^{\,2} = p_o - \frac{\rho}{2}\cdot\frac{c_1^{\,2}}{r^2} = p(r) \quad , \qquad (38b)$$

wie sich durch Einsetzen verifizieren läßt. Für die Geschwindigkeit $w_\psi$ gilt also die Verteilung des konstanten Dralls.

Um diesen Strömungsfall numerisch mit dem entwickelten Programmsystem zu untersuchen, ist zunächst ein dem Bild 5.2 entsprechender Kanal dadurch simuliert worden, daß für den Radius R ein sehr großer Wert $(R/(R_i+b/2) = 2.8\cdot 10^6)$ eingegeben wurde. Am Eintritt des Kanals ist dann ein der exakten Lösung (38a) entsprechendes Geschwindigkeitsprofil (Bild 5.3) vorgegeben und der Wert für die Viskosität $\nu$ zu Null gesetzt worden.

Das Ergebnis dieser Rechnung ergibt ein mit der Lauflänge ($\psi$-Richtung) unveränderliches Geschwindigkeitsprofil. Die Komponenten $w_r$ und $w_\varphi$, also die Querströmungskomponenten, sind im gesamten Lösungsgebiet gleich Null. Damit entspricht die numerische Lösung für die Geschwindigkeiten genau der exakten Lösung. Auch die im Kanal bestimmte Druckverteilung

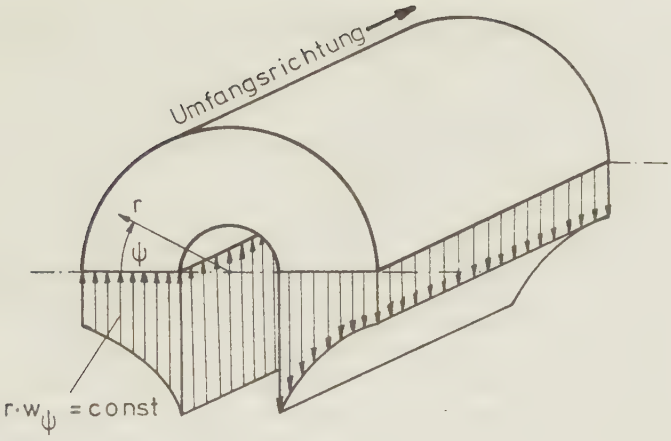



Bild 5.3: Potentialwirbel im Umlenkkanal

unterscheidet sich nicht von der analytischen Lösung. Der berechnete Druck variiert über dem Radius r entsprechend Gleichung (38b), bleibt aber in $\phi$-Richtung unveränderlich.

Somit zeigt sich, daß das numerische Verfahren diesen Strömungsfall exakt beschreiben kann.

Entsprechend kann durch eine detaillierte Untersuchung der Differenzengleichungen gezeigt werden, daß der Potentialwirbel von dem numerischen Verfahren immer exakt beschrieben wird, d.h. daß die Dichte des Gitternetzes keinen Einfluß auf die Genauigkeit des Ergebnisses hat.

In der wirklichen Krümmerströmung wird das Geschwindigkeitsprofil sowohl durch die Reibung als auch durch den endlichen Wert des Radius R beeinflußt. Ein endlicher Wert von R hat eine sich während der Durchströmung verändernde Querschnittsfläche und damit eine Verzögerung bzw. Beschleuni-

gung des Fluids zur Folge. Entsprechend Abschnitt 4.2 gibt der Quotient

$$\frac{A(\varphi=90^{\circ})}{A(\varphi=0^{\circ})} = \frac{R_i + b/2}{R} + 1$$

das Verhältnis von größter zu kleinster durchströmter Fläche an. Wird R im Verhältnis zu den Größen $R_i$ und b sehr groß, so ist die Querschnittsänderung vernachlässigbar, wie es bei der Nachrechnung des Potentialwirbels der Fall ist. Bei ausgeführten Turbomaschinenkanälen, insbesondere bei hydrodynamischen Wandlern, ist die Querschnittsänderung im allgemeinen nicht mehr vernachlässigbar. In diesen Fällen ist der Potentialwirbel selbst bei Beschränkung auf den reibungsfreien Fall keine Lösung des Strömungsproblems mehr.

Die Änderung des Querschnitts ist erst bei Betrachtung der räumlichen Geometrie erkennbar, da der Meridianschnitt eines Kanals konstanter Breite in der Ebene keine Querschnittsänderung aufweist. Dies zeigt, daß die Durchströmung der hier betrachteten Ringräume grundsätzlich nicht auf den zweidimensionalen Fall reduziert werden kann.

Zusätzlich treten bei der wirklichen Strömung Reibungseinflüsse auf, die der Potentialwirbel nicht berücksichtigt.

Da das programmierte Rechenverfahren aufgrund seiner dreidimensionalen Struktur die wirklichen Querschnitte erfaßt und außerdem den Reibungseinfluß berücksichtigt, kann die Veränderung eines Geschwindigkeitsprofils, das mit über der Kanalbreite konstantem Drall die Umlenkung anströmt, auch unter dem Einfluß dieser Effekte berechnet werden.

In Bild 5.4 sind solche Rechnungen dargestellt. Am Eintritt in die Umlenkung wird ein Geschwindigkeitsprofil mit konstantem Drall ($w_\phi \cdot r$ = const) vorgegeben, das aus der Potentialtheorie folgt. Mit diesem Vorgabeprofil werden vier verschiedene Rechnungen durchgeführt. Dabei bleibt die Geometrie des Kanals im Meridianschnitt erhalten, der Krümmungsradius in Umfangsrichtung ist jedoch unterschiedlich, so daß verschiedene Verhältnisse von größtem zu kleinstem durchströmten Querschnitt betrachtet werden. Diese Querschnittänderung wird durch die Flächenverhältniszahl

$$\delta_A = \frac{R + R_i + b/2}{R} = 1 + \frac{R_i + b/2}{R}$$

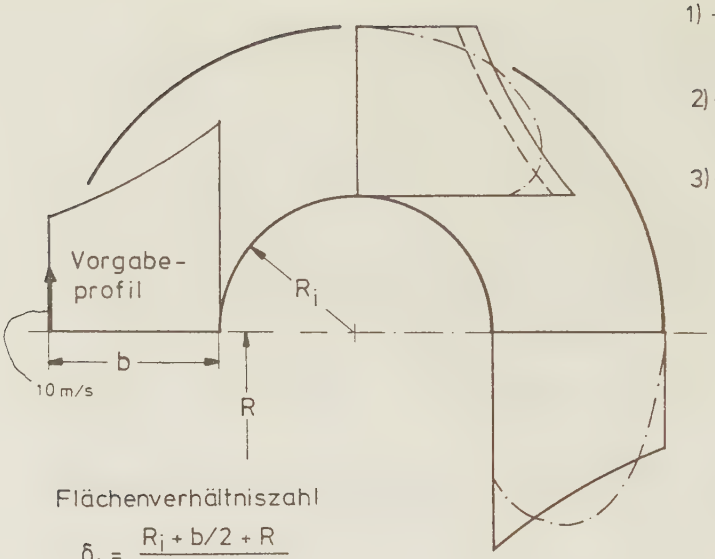
charakterisiert. Außerdem werden die Rechnungen mit $\nu = 0$ (reibungsfrei) und mit $\nu \neq 0$ (reibungsbehaftet) durchgeführt.

Für die vier Beispiele gilt:

1) $\nu = 0$; $\delta_A = 1{,}0$
2) $\nu = 100 \cdot \nu_{Luft}$; $\delta_A = 1{,}0$
3) $\nu = 0$; $\delta_A = 1{,}12$
4) $\nu = 100 \cdot \nu_{Luft}$; $\delta_A = 1{,}12$

Beispiel 1 repräsentiert die reibungsfreie, ebene Strömung. Aufgrund der drehungsfreien Zuströmung muß sich dabei eine Potentialströmung einstellen. Da, wie bereits erwähnt, der Potentialwirbel von dem Rechenverfahren ohne numerischen Fehler nachgebildet wird, entspricht die Lösung in diesem Beispiel exakt der Potentialtheorie. Die Profilform ändert sich nicht während der Durchströmung.

Beispiel 2 zeigt den Einfluß der Reibung auf die Strömung, der sich besonders in Wandnähe auswirkt.



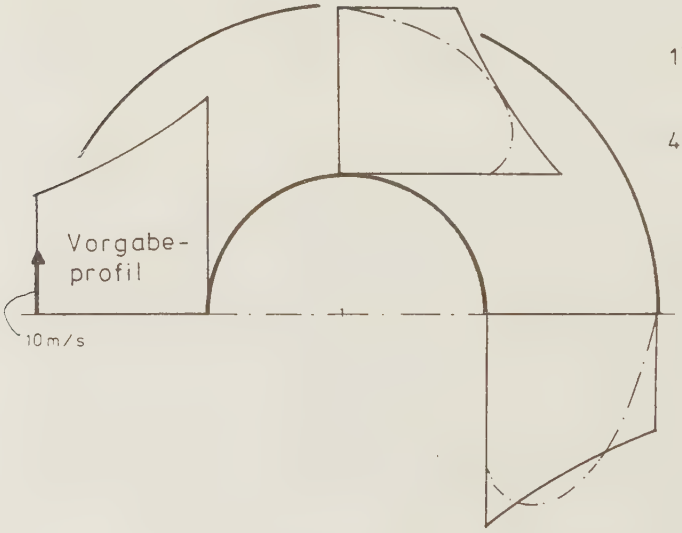




Bild 5.4: Reibungs- und Verzögerungseinfluß

Beispiel 3 demonstriert den Einfluß des endlichen Radius in Umfangsrichtung. Das Fluid erfährt erst eine Verzögerung, dann eine Beschleunigung, wobei die Profilform annähernd erhalten bleibt. Der Einfluß der veränderlichen Querschnitte führt nur zu geringen Verformungen der Profilform.

In Beispiel 4 schließlich sind der Einfluß der Querschnittveränderung und der Reibung gleichzeitig berücksichtigt.

## 5.2. Die Couette-Strömung

Während der Potentialwirbel eine exakte Lösung der Bewegungsgleichungen für den reibungs- und drehungsfreien Fall darstellt, soll als nächstes Beispiel die sowohl reibungs- als auch drehungsbehaftete Couette-Strömung behandelt werden.

Um mit Hilfe der Koordinatenflächen des Toruskoordinatensystems die geometrische Anordnung für diese Strömung zu erhalten, soll zunächst wieder Bild 5.2 betrachtet werden, in dem ein Kanal ohne Krümmung in Umfangsrichtung dargestellt ist. Dieser Kanal beginnt bei $\psi = 0^{\circ}$ und endet bei $\psi = 180^{\circ}$, stellt also eine $180^{\circ}$- Umlenkung dar. In gleicher Weise kann auch ein Kanal konstruiert werden, dessen Eintritt bei $\psi = 90^{\circ} - \Delta\psi/2$ und dessen Austritt bei $\psi = 90^{\circ} + \Delta\psi/2$ liegt, wie Bild 5.5 zeigt. Läßt man bei diesem Kanal gedank-

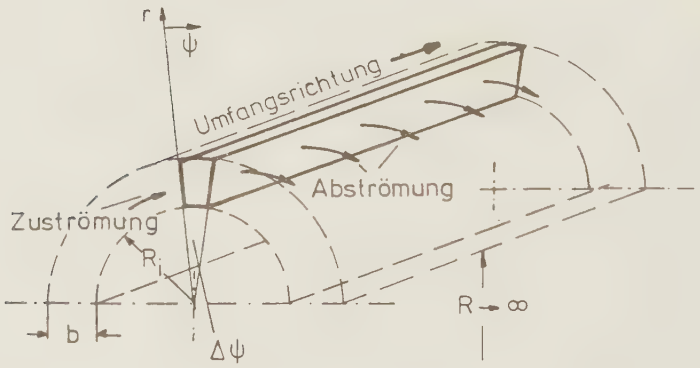



Bild 5.5: Geometrische Anordnung zur Berechnung der Couette-Strömung

lich den Radius $R_i$ bei gleichbleibender Kanalbreite b sehr groß und gleichzeitig $\Delta\psi$ sehr klein werden, so daß die Kanallänge $R_i \cdot \Delta\psi$ einen festen Wert behält, so erhält man im Extremfall $R_i \to \infty$ einen vollständig krümmungsfreien Kanal, der auch wieder in Umfangsrichtung aufgrund der Randbedingung der periodischen Wiederholung ins Unendliche fortgesetzt vorgestellt werden muß (Bild 5.6). Während im Fall des Kanals von Bild 5.2 nur die Winkelkoordi-

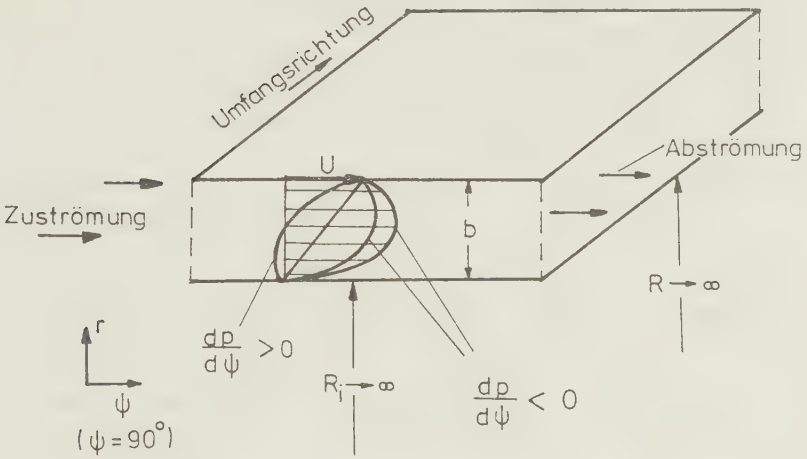



Bild 5.6: Kanal der Couette-Strömung

nate $\varphi$ in eine gerade Koordinate übergeht, gilt dies hier für beide Winkelkoordinaten $\psi$ und $\varphi$. Dadurch entsteht ein System von kartesischen Koordinaten, was durch den Grenz-

übergang $R \to \infty$ und $R_i \to \infty$ in den Differentialgleichungen aus Anhang A1 bestätigt werden kann. Es liegt dann also der Fall einer Strömung zwischen zwei parallelen Platten vor, für den eine exakte Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen existiert. Diese Lösung ergibt sich aus den Gleichungen in Toruskoordinaten (siehe Anhang A1) unter folgenden Voraussetzungen:

- keine Krümmung der Koordinaten
  ($R \to \infty$ und $R_i \to \infty$)
- keine Querströmung
  ($w_r = 0$ und $w_\varphi = 0$)
- ebene Strömung; keine Änderung der Strömungsgrößen in Umfangsrichtung
  ($\partial / \partial \varphi = 0$)

Die Gleichungen lauten dann:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \qquad \text{(r-Richtung)} \qquad (39a)$$

$$\frac{w_\psi}{r} \cdot \frac{\partial w_\psi}{\partial \psi} = - \frac{1}{\rho \cdot r} \cdot \frac{\partial p}{\partial \psi} + \nu \cdot \left[ \frac{\partial^2 w_\psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 w_\psi}{r^2 \partial \psi^2} \right] \qquad (\psi\text{-Richtung}) \qquad (39b)$$

$$0 = 0 \qquad (\varphi\text{-Richtung}) \qquad (39c)$$

$$\frac{\partial w_\psi}{r \partial \psi} = 0 \qquad \text{(Kontinuitätsgleichung)} \qquad (39d)$$

Diese Gleichungen besagen, daß der Druck nur von der $\psi$-Koordinate abhängt, während die Geschwindigkeit $w_\psi$ nur eine Funktion von r ist:

$$p = p(\psi)$$

$$w_\psi = w_\psi(r)$$

Es folgt deshalb aus (39b) und (39d):

$$\frac{1}{\rho \cdot r} \cdot \frac{\partial p}{\partial \psi} = \nu \cdot \frac{\partial^2 w_\psi}{\partial r^2} = c_1 = \text{const}$$

und damit ergibt sich als Lösung:

$$w_\psi(r) = \frac{c_1}{2\nu} \cdot r^2 + c_2 \cdot r + c_3$$

$$\frac{\partial p}{r \partial \psi} = \rho \cdot c_1 = \text{const}$$

Da eine reibungsbehaftete Strömung vorliegt, wird am Rand die Haftbedingung eingeführt. Dabei wird angenommen, daß die obere Wand sich in $\psi$-Richtung mit einer beliebigen Geschwindigkeit U bewegen kann, während sich die untere Wand in Ruhe befindet. Es gilt daher:

$$w_\psi(R_i) = 0$$

$$w_\psi(R_i + b) = U$$

Dies führt zu der Lösung für die Geschwindigkeit $w_\psi$:

$$w_\psi(r) = \frac{r - R_i}{b} \cdot U - \frac{b^2}{2\nu \cdot \rho} \cdot \frac{\partial p}{r \partial \psi} \cdot \left[ \frac{r - R_i}{b} - \left[ \frac{r - R_i}{b} \right]^2 \right]$$

Dabei hängt die Form des Geschwindigkeitsprofils von der Geschwindigkeit der Wand U und dem (konstanten) Druckgradienten $\partial p / r \partial \psi$ ab. Einige der hier betrachteten Geschwindigkeitsverteilungen sind in Bild 5.6 für verschiedene Druckgradienten eingezeichnet.

Zur numerischen Nachrechnung der Geschwindigkeits- und Druckverteilung der Couette-Strömung ist dem Programm ein Kanal mit im Verhältnis zur Kanalbreite b sehr großen Radien R und $R_i$ vorgegeben worden (R=1500m; $R_i$=1150m; b=0,1m; $\Delta\psi$=0,5°; Kanallänge: 1m). Das Geschwindigkeitsprofil am Eintritt ist aus der exakten Lösung für einen vorgegebenen Druckgradienten und eine bestimmte Geschwindigkeit U bestimmt worden. Um die Randbedingung der bewegten Wand berücksichtigen zu können, ist durch eine Programmänderung die sonst übliche Randbedingung $w_\psi = 0$ am oberen Rand durch $w_\psi = U$ ersetzt worden. Das Ergebnis dieser Rechnungen, die für verschiedene Druckgradienten durchgeführt worden sind, ist eine Druck- und Geschwindigkeitsverteilung in dem Kanal, die genau mit der exakten Lösung nach Bild 5.6 übereinstimmt: das Geschwindigkeitsprofil ändert sich nicht mit der Lauflänge, während der Druck linear in Strömungsrichtung abnimmt, aber in jeder Querströmungsebene konstant bleibt.

Angeregt durch diese genaue Übereinstimmung zwischen exakter und numerischer Lösung ist eine Analyse der im Programm verwendeten Differenzengleichungen durchgeführt worden. Es konnte dabei gezeigt werden, daß das numerische Verfahren die Couette-Strömung unabhängig von der verwendeten Gitterweite immer exakt beschreibt.

Aus der Gleichung für die exakte Lösung der Geschwindigkeit $w_\psi(r)$ ist zu ersehen, daß bei Druckgradienten

$$\frac{\partial p}{r\,\partial \psi} > \frac{2U \cdot \nu \cdot \rho}{b^2}$$

teilweise Rückströmen eintritt; die Geschwindigkeit $w_\psi$ wird dann in einem Bereich des Kanals negativ (siehe Bild 5.6). Obwohl das numerische Verfahren von seinen Voraussetzungen her keine Rückströmgebiete zuläßt, ist dennoch das Verhalten des Algorithmus in solchen Fällen untersucht worden, in

denen sich in der exakten Lösung Rückströmen einstellt. Dies führt zu folgendem Ergebnis: wird der Druck zu Beginn der Rechnung im Lösungsgebiet gleich dem Umgebungsdruck gesetzt, so ist das Verfahren in diesen Fällen nicht in der Lage, die Impulsgleichungen und die Kontinuitätsgleichung in Übereinstimmung zu bringen; es stellt sich keine Konvergenz ein. Da die Druckverteilung aber aus der exakten Lösung bekannt ist, kann zu Beginn der Rechnung auch diese Verteilung vorgegeben werden. Der Algorithmus erreicht dann seine Fehlerschranke direkt bei der ersten Durchrechnung des Kanals. Die exakte Lösung stellt also auch in diesen Fällen die Lösung der Differenzengleichungen dar. Obwohl das Verfahren nicht in der Lage ist, von sich aus die Lösung der Differenzengleichungen aufzufinden, wenn Rückströmgebiete vorliegen, so kann doch gezeigt werden, daß die Lösung der numerischen Gleichungen mit der exakten Lösung übereinstimmt.

## 5.3. Die Drallströmung in einem unbeschaufelten, parallelwandigen Plattendiffusor

Für die Strömung in einem solchen Diffusor (Bild 5.7) existiert eine exakte Lösung der Bewegungsgleichungen, wenn die Voraussetzungen

- Reibungsfreiheit ($\nu = 0$)
- Rotationssymmetrie ($\partial/\partial\varphi = 0$)
- ebene Strömung (keine Änderung der Strömungsgrößen über der Diffusorbreite b)

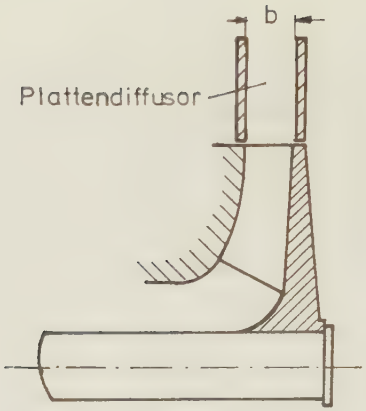



Bild 5.7: Parallelwandiger Plattendiffusor

getroffen werden.

Die Nachbildung der Geometrie eines parallelwandigen Plattendiffusors kann mit dem Toruskoordinatensystem wie folgt durchgeführt werden: der Eintritt des Kanals in Bild 5.1 liegt

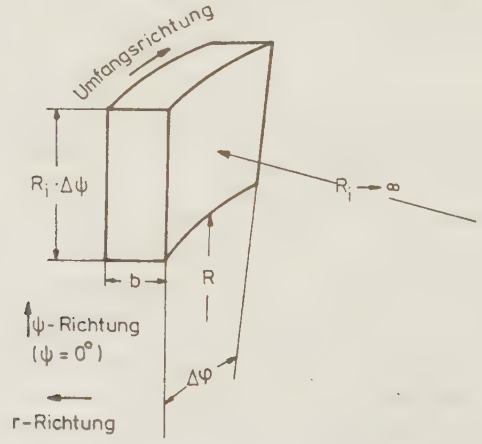



Bild 5.8: Kanal zur Berechnung der Diffusorströmung

bei $\psi = 0^{\circ}$, der Austritt bei $\psi = 180^{\circ}$. Betrachtet man einen entsprechenden Kanal, dessen Eintritt ebenfalls bei $\psi = 0^{\circ}$ liegt, dessen Austritt aber bei $\psi = \Delta\psi$ liegt, wobei $\Delta\psi$ ein sehr kleiner Winkel ist, so erhält man den Diffusor, wenn $R_i$ im Verhältnis zur Kanalbreite wieder sehr groß wird (Bild 5.8). Das Produkt $R_i \cdot \Delta\psi$ stellt dann die radiale Erstreckung des Diffusors dar. Das Toruskoordinatensystem geht wieder in ein Zylinderkoordinatensystem über.

Die Größe der betrachteten Teilung, d.h. die Größe des Winkels $\Delta\varphi$ beeinflußt die Rechnung nicht, da Rotationssymmetrie angenommen wird.

Der Radius R hat in diesem Fall endliche Größe, so daß $\varphi$ eine echte Winkelkoordinete darstellt.

In Bild 5.9 ist der Plattendiffusor in einem Zylinderkoordi-

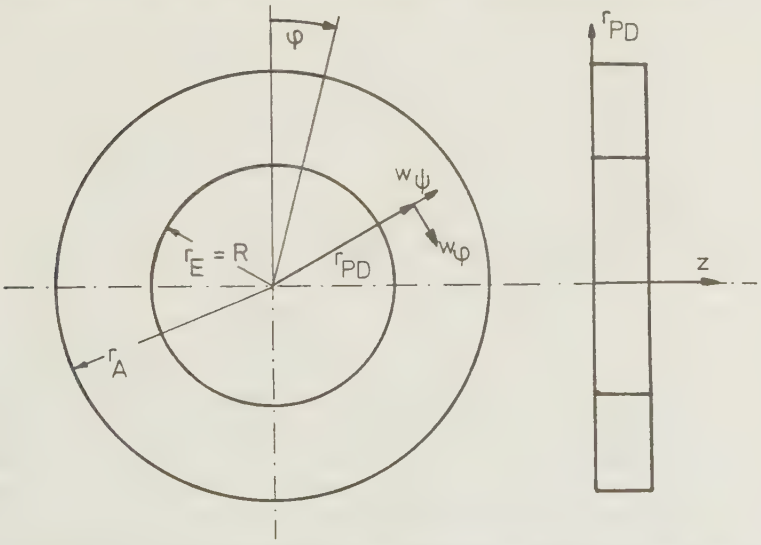



Bild 5.9: Plattendiffusor im Zylinderkoordinatensystem

natensystem ($r_{PD}$, $\varphi$, z) dargestellt, in das die Toruskoordinaten für $R_i \to \infty$ übergehen. Die $\psi$-Koordinate zeigt in Richtung der radialen Erstreckung des Diffusors und geht in die Koordinate $r_{PD}$ des Zylinderkoordinatensystems über. Die Geschwindigkeit $w_\psi$ stellt die Meridian-, $w_\varphi$ die Drallkomponente der Strömung dar.

Unter den oben genannten Voraussetzungen (Reibungsfreiheit, Rotationssymmetrie, ebene Strömung) lauten die Bewegungsgleichungen für die Diffusorströmung in Zylinderkoordinaten:

$$w_\psi \cdot \frac{\partial w_\psi}{\partial r_{PD}} - \frac{w_\varphi^2}{r_{PD}} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial r_{PD}} \qquad \text{(z-Richtung)} \qquad (40a)$$

$$w_\psi \cdot \frac{\partial w_\varphi}{\partial r_{PD}} + \frac{w_\varphi \cdot w_\psi}{r_{PD}} = 0 \qquad (r_{PD}\text{-Richtung}) \qquad (40b)$$

$$0 = 0 \qquad (\psi\text{-Richtung}) \qquad (40c)$$

$$\frac{\partial w_\psi}{\partial r_{PD}} + \frac{w_\psi}{r_{PD}} = 0 \qquad \text{(Kontinuitätsgleichung)} \qquad (40d)$$

Überlagert man die potentialtheoretischen Lösungen für eine Quellströmung und einen Potentialwirbel, so folgt:

$$w_\psi = w_\psi(r_{PD}) = \frac{c_\psi}{r_{PD}} \; ; \qquad c_\psi = \text{const} \qquad (41a)$$

$$w_\varphi = w_\varphi(r_{PD}) = \frac{c_\varphi}{r_{PD}} \; ; \qquad c_\varphi = \text{const} \qquad (41b)$$

$$p = p(r_{PD}) = p_o - \frac{\rho}{2} \cdot (w_\varphi^2 + w_\psi^2)$$

$$= p_o - \frac{\rho}{2} \cdot (c_\varphi^2 + c_\psi^2) \cdot \frac{1}{r_{PD}^2} \qquad (41c)$$

Da $w_\psi$ und $w_\varphi$ in gleicher Weise mit dem Radius abnehmen, bleibt das Verhältnis zwischen ihnen und damit der von den beiden Geschwindigkeitskomponenten eingeschlossene Strömungswinkel $\alpha = \arctan(w_\psi/w_\varphi)$ konstant. Ein durch den Plattendiffusor strömendes Fluidteilchen bewegt sich dann auf einer logarithmischen Spirale (siehe /5/, Bild 5.10).

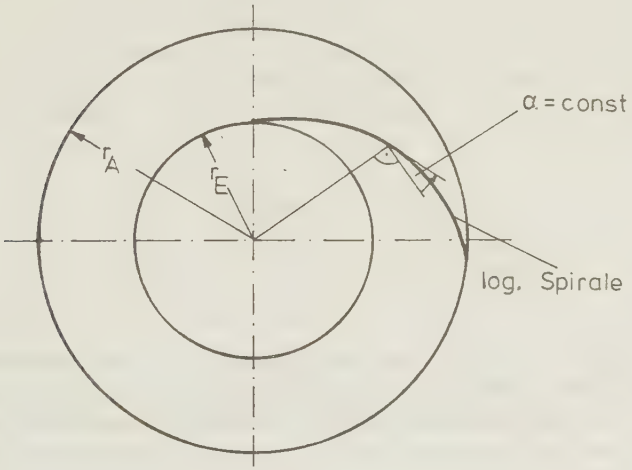



Bild 5.10: Bahn eines Fluidteilchens im Diffusor

Zur Bestimmung der numerischen Lösung des Strömungsfalles wurde ein Diffusor mit dem Eintrittsradius $r_E$ = 0,3m, Austrittsradius $r_A$ = 0,5m und der Breite b = 0,1m vorgegeben. Außerdem wurde $\Delta\psi = 0{,}5^\circ$ und damit $R_i = (r_A - r_E)/\Delta\psi$ = 22,9m gewählt. Die Zähigkeit $\nu$ wurde zu Null gesetzt. Am Eintritt des Diffusors, am Radius $r_E$, wurden verschiedene Geschwindigkeiten $w_\psi$ und $w_\varphi$ vorgegeben. Bei diesen numerischen Rechnungen ergab sich folgendes Ergebnis: bei einer drallfreien

Strömung ($w_\varphi = 0$) konnte wieder eine genaue Übereinstimmung zwischen analytischer und numerischer Lösung nachgewiesen werden, die von der verwendeten Gitterweite unabhängig ist. Dies gelingt jedoch nicht mehr bei drallbehafteter Strömung. In diesem Fall hängt die Übereinstimmung von der verwendeten Rechenschrittweite in Durchflußrichtung ($\psi$-Richtung) ab. Bild 5.11 stellt diese Ergebnisse dar. Der Drallwinkel betrug dabei $\alpha = 68^\circ$. Über der radialen Erstreckung des Diffusors von $r_E$ bis $r_A$ sind zunächst die dimensionslosen exakten Lösungen für den Druck p, die Meridiankomponente $w_\psi$ und die Drallkomponente $w_\varphi$ aufgetragen. Für die mit dem Totaldruck am Eintritt des Diffusors $\rho/2 \cdot (w_\psi^2 + w_\varphi^2)_E$ dimensionslos gemachte Druckdifferenz gilt entsprechend der exakten Lösung (41c):

$$\frac{p - p_o}{\frac{\rho}{2} \cdot (w_\varphi^2 + w_\psi^2)_E} = \frac{r_E}{r_A} - \frac{r_E^2}{r_{PD}} \quad ,$$

wenn $p_o$ der Druck am Diffusoraustritt ist. Den Verlauf dieser Funktion zeigt der untere Teil von Bild 5.11a. Die jeweils mit dem entsprechenden Wert am Eintritt dimensionslos gemachten Geschwindigkeiten $w_\psi$ und $w_\varphi$ werden nach (41a) und (41b) durch

$$\frac{w_\psi(r_{PD})}{w_\psi(r_E)} = \frac{w_\varphi(r_{PD})}{w_\varphi(r_E)} = \frac{r_E}{r_{PD}}$$

beschrieben und sind im oberen Teil von Bild 5.11a dargestellt. Die Bilder 5.11b und 5.11c zeigen die Abweichungen der numerischen von der analytischen Lösung für verschiedene Rechenschrittweiten $\Delta r_{PD}$ in Strömungsrichtung. Ein numerischer Fehler tritt nur bei der Drallkomponente $w_\varphi$ und dem Druck p auf. Die Meridiankomponente wird immer entsprechend der exakten

Lösung bestimmt, da ihr Verlauf allein durch die Kontinuitätsgleichung festgelegt ist und die Erfüllung der Massenbilanz gerade das Konvergenzkriterium des Rechenverfahrens darstellt. Entsprechend der gewählten Fehlerschranke (in diesem Fall wurde $\varepsilon = 0.1\%$ gewählt) ist die Genauigkeit der Meridiankomponente bestimmt.

Den relativen Fehler der numerischen Lösung für den Druck

$$\varepsilon_p = \frac{p_{numerisch} - p_{exakt}}{p_{exakt}} \cdot 100\%$$

und für die Drallkomponente

$$\varepsilon_{w_\varphi} = \frac{w_{\varphi\,numerisch} - w_{\varphi\,exakt}}{w_{\varphi\,exakt}} \cdot 100\%$$

zeigen Bild 5.11b und 5.11c für vier verschiedene Rechenschrittweiten $\Delta r_{PD}$. Bemerkenswert ist, daß der Fehler der Drallkomponente $\varepsilon_{w_\varphi}$ in Richtung der schrittweisen Rechnung zunimmt, während $\varepsilon_p$ den umgekehrten Verlauf zeigt. Dies ist dadurch bedingt, daß die Randbedingung für p am Austritt, für $w_\varphi$ jedoch am Eintritt des Kanals vorgegeben wird. Da die Randbedingungen der exakten Lösung entsprechen, verschwindet der Fehler jeweils an diesen Stellen. Da der maximale Fehler selbst im Fall der relativ großen Schrittweite $\Delta r_{PD} = 0{,}05m$ bei nur etwa 3% liegt, kann von guter Übereinstimmung zwischen numerischer und analytischer Lösung gesprochen werden.

Bild 5.12 zeigt noch einmal in anderer Darstellungsweise den Vergleich zwischen den numerischen Lösungen für die Drallkomponente $w_\varphi/w_{\varphi E}$ bei den verschiedenen Rechenschrittweiten (gestrichelte Linien) und der exakten Lösung (Vollinie). Dieser Vergleich läßt sich für die Meridiankomponente und den Druck wegen der geringen Fehler (im ungünstigsten Fall

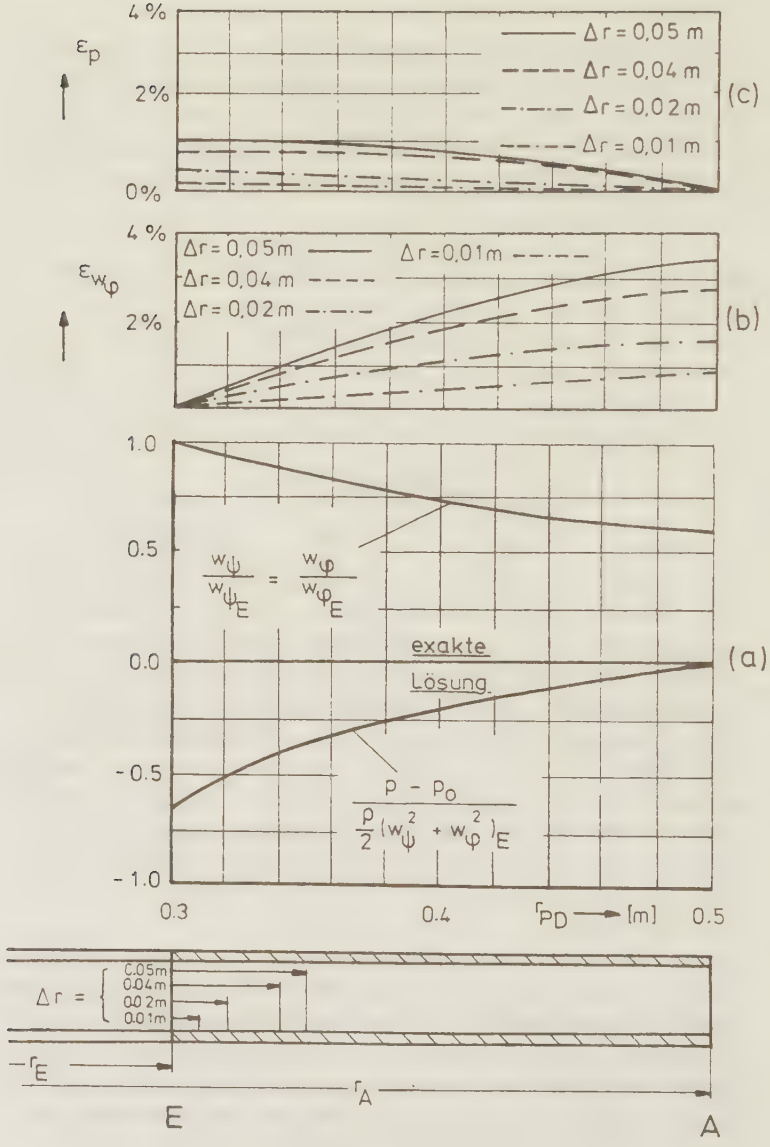



Bild 5.11: Relative Fehler bei der Berechnung der Drallströmung

unter 1%) nicht mehr auf diese Weise darstellen.

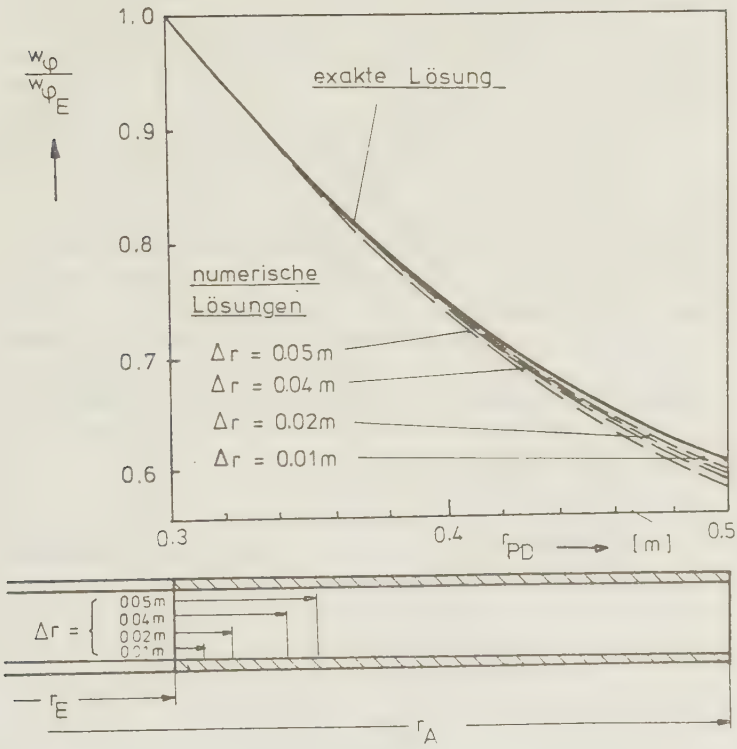



Bild 5.12: Einfluß der Rechenschrittweite auf die Genauigkeit der Lösung

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß mit dem Potentialwirbel, der Couette-Strömung und der Drallströmung im paral-

lelwandigen Plattendiffusor drei Beispiele gefunden wurden, die den Vergleich mit einer analytischen Lösung zulassen und gleichzeitig unterschiedliche Mechanismen des numerischen Modells ansprechen. Während für den Potentialwirbel Reibungs- und Drehungsfreiheit gilt, ist die Couette-Strömung sowohl reibungs- als auch drehungsbehaftet. In der Diffusorströmung wird außerdem der Einfluß einer Drallkomponente berücksichtigt.

Die Übereinstimmung zwischen numerischer und exakter Lösung ist in allen Fällen sehr gut. Außer im Fall der Drallströmung im Diffusor wird die analytische Lösung sogar ohne jeden Fehler erreicht, wobei die Dichte des verwendeten Gitternetzes ohne Einfluß auf das Ergebnis bleibt. Eine Beeinflussung des Ergebnisses durch die Rechenschrittweite in Durchflußrichtung macht sich nur bei der drallbehafteten Diffusorströmung bemerkbar. In diesem Fall zeigt sich eine Verringerung des numerischen Fehlers bei kleinerer Schrittweite. Insgesamt ist die erreichte Genauigkeit aber auch bei großer Schrittweite noch sehr hoch.

## 6. Aufbau des Umlenkkanal-Versuchsstandes und angewandte Meßtechnik

Zur experimentellen Untersuchung einer mit dem beschriebenen Programmsystem berechenbaren Strömung ist ein Versuchsstand entwickelt worden, der Messungen an einem um $180^{\circ}$ umlenkenden Rückführkanal gestattet. Da die Berechnungen unter der Voraussetzung konstanter Dichte durchgeführt werden, kann dabei als Strömungsmedium Wasser verwendet werden.

### 6.1. Mechanischer Aufbau des Versuchsstandes

Bild 6.1 zeigt eine Skizze des Versuchsaufbaus. Das Wasser gelangt zunächst über ein Reduzierstück in das Zulaufrohr. Der erste Teil des Zulaufrohres ist mit Leitblechen versehen, die einen eventuell in der Zuströmung vorhandenen Drall herausnehmen sollen. Ein Strömungsgleichrichter am Ende des Zulaufrohres, der aus einem Gitter mit bienenwabenförmigen Maschen besteht, soll ebenfalls für eine drallfreie Zuströmung mit homogener Turbulenzstruktur sorgen. Der mittlere Wabendurchmesser des Gitters beträgt etwa 0,08 m. An eine Umlenkung in die radiale Richtung schließt sich ein Kranz von verstellbaren Leitschaufeln an. Auf diesen Schaufelkranz folgt als eigentliche Meßstrecke die $180^{\circ}$- Umlenkung in einer Form, wie sie auch bei hydrodynamischen Wandlern vorkommt. Je nach Stellung der Leitschaufeln wird die Umlenkung mit mehr oder weniger starkem Drall durchströmt. Als Leitschaufeln werden 36 Schaufeln mit dem Profil NACA 65-018 verwendet. Diese Schaufeln haben eine gerade Skelettlinie.

In dem Versuchsstand wird also nur die stationäre Durchströ-

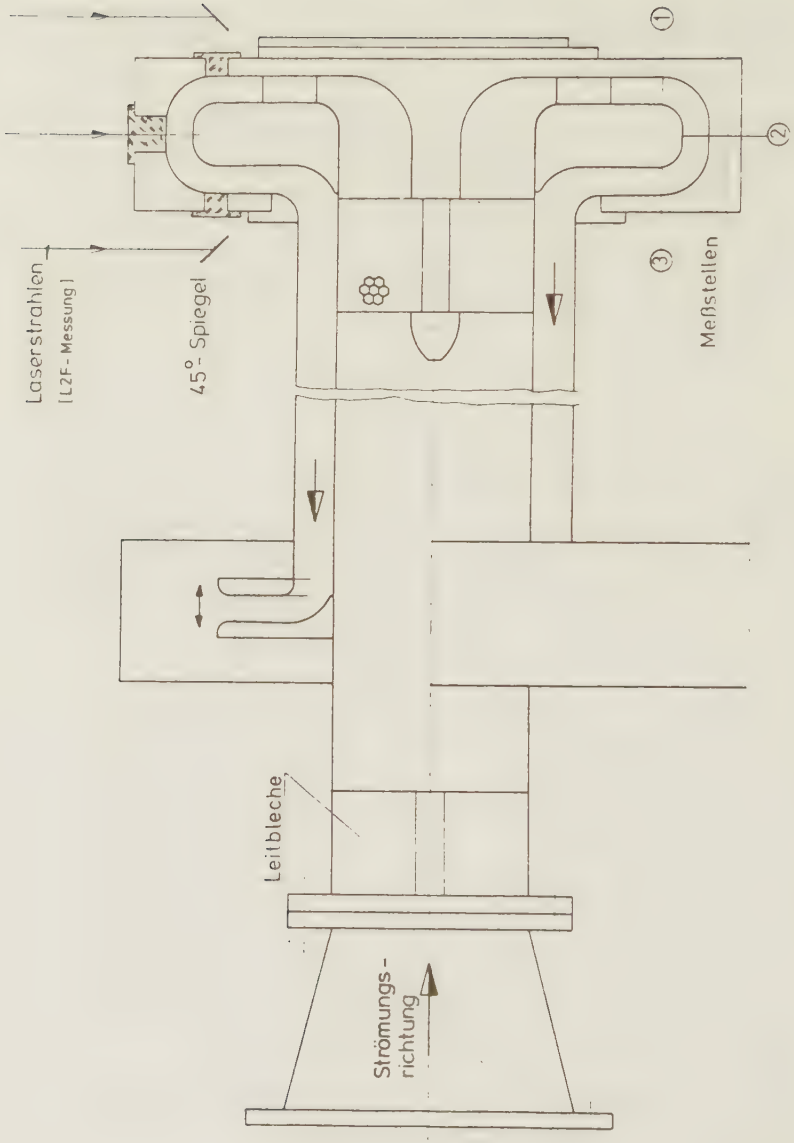



Bild 6.1: Skizze des Versuchsstandes

mung der Umlenkung untersucht, obwohl solch eine Umlenkung in einer wirklichen Maschine infolge der Geschwindigkeitsverteilung nach dem rotierenden Laufrad instationär durchströmt wird.

Nach der Meßstrecke wird die Strömung schließlich wieder in die axiale Richtung umgelenkt und strömt in einem zum Zulaufrohr konzentrischen Ablaufrohr zurück. Der Austritt aus diesem Rohr erfolgt radial auswärts gerichtet und rotationssysmmetrisch. Durch Veränderung des Austrittsquerschnittes ist die Möglichkeit zur Drosselung des Volumenstroms gegeben. Ein Spritzwasserkasten sammelt das austretende Wasser und führt es in den unter dem Versuchsstand befindlichen Wasserkanal der Versuchshalle zurück.

Die Lage der Meßstellen für Geschwindigkeits- und Druckmessungen und die Abmessungen des Kanals zeigt Bild 6.2.

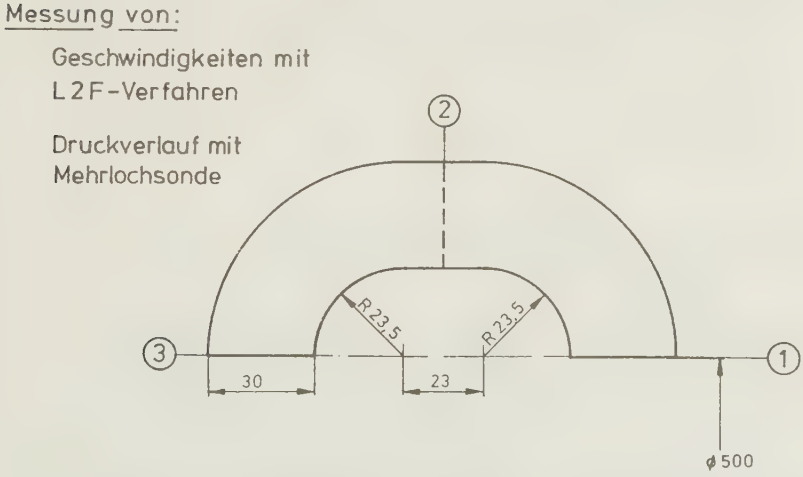



Bild 6.2: Abmessungen des Umlenkkanals und Lage der Meßstellen

Am Eintritt in die Umlenkung (Stelle 1), in der Mitte des oberen geraden Teil (Stelle 2) und am Ende der Umlenkung (Stelle 3) sind im Bereich einer Schaufelteilung Plexiglasfenster eingelassen, die die Ausmessung der Geschwindigkeitsprofile mit Hilfe des in Abschnitt 6.2 beschriebenen Laser-2-Focus-Verfahrens erlauben. Die Profile können dabei über der Kanalbreite und im Bereich einer Schaufelteilung in Umfangsrichtung der Maschine abgetastet werden.

An den gleichen Stellen (1, 2 und 3), allerdings um $120^{\circ}$ in Umfangsrichtung versetzt, sind Anschlüsse zur Einführung von Mehrlochsonden vorgesehen, die es erlauben, den Druckverlauf über der Kanalbreite, also den Querdruckgradienten, zu bestimmen.

Im Bereich einer weiteren Schaufelteilung sind in die Innenkontur der Umlenkung Fäden eingeklebt worden, die durch Plexiglasfenster beobachtet werden können und eine anschauliche Vorstellung der Strömung vermitteln.

## 6.2. Beschreibung der angewandten Meßtechnik (Laser-2-Focus-Verfahren)

Zur Überprüfung des abgeleiteten Rechenverfahrens sind Druck- und Geschwindigkeitsmessungen an dem beschriebenen Versuchsstand durchgeführt worden.

Als Meßverfahren zur Bestimmung der Strömungsgeschwindigkeit ist das von der DFVLR entwickelte Laser-2-Focus-Verfahren (L2F-Verfahren) ausgewählt worden /63/. Diese Methode erlaubt die berührungslose Messung von Strömungsge-

schwindigkeit und Strömungsrichtung auf der Grundlage der Reflektion des Laserlichtes an von der Strömung mit gleicher Geschwindigkeit mitgeführten Teilchen. Dabei bietet der Einsatz von Wasser als Strömungsmedium im Gegensatz zu der Verwendung von Luft den Vorteil, daß bereits genügend Teilchen (Schmutzpartikel) zur Reflektion des Lichtes vorhanden sind. Bei Luft sind Teilchenzusätze notwendig. Dies hat den Nachteil, daß sich aufgrund von statischen Aufladungen Ablagerungen der Teilchen an den Meßfenstern und den übrigen Kanalwänden bilden können. Ein weiterer Nachteil ist die aufgrund der geringeren Dichte schwächere Schleppwirkung der Luft gegenüber der von Wasser, so daß die Teilchen möglicherweise eine andere Geschwindigkeit als die sie umgebende Luft haben.

Das Prinzip des L2F-Verfahrens sei im folgenden Abschnitt kurz erläutert. Ein Laserstrahl wird durch ein Rochon-Prisma in zwei Teilstrahlen zerlegt. Diese beiden Teilstrahlen werden durch ein Linsensystem in einer gemeinsamen Brennebene fokussiert, so daß zwei sehr intensiv beleuchtete Zonen, die das sogenannte Meßvolumen bilden, entstehen. Dies ist in Bild 6.3 dargestellt. Die beiden Zonen besitzen einen

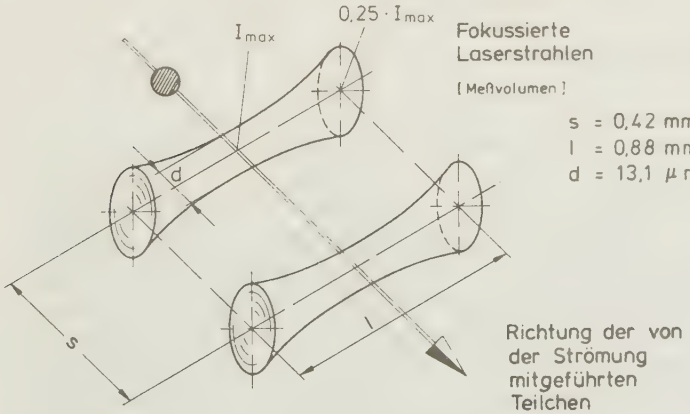



Bild 6.3: Meßvolumen des L2F-Verfahrens

definierten Abstand s von einander und bilden eine Lichtschranke für die in der Strömung mitgeführten Teilchen. Durchläuft ein Teilchen eine solche Zone, so streut es das Licht in alle Richtungen. Das rückwärts gestreute Licht wird von einem Objektiv gesammelt und gelangt für jede der beiden Zonen getrennt jeweils in einen empfindlichen Photodetektor (Photomultiplier), der den Streulichtimpuls in einen elektrischen Impuls umsetzt. In Richtung der Laserstrahlen ist die Länge des Meßvolumens dabei durch die abnehmende Strahlungsintensität gegeben. Die Grenze ist durch entsprechende Einstellung der elektronischen Auswertegeräte auf ein Viertel der maximalen Intensität eingestellt worden (Bild 6.3). Durchläuft ein Teilchen beide Strahlen nacheinander (Bild 6.4), so verursacht es zwei Streulichtimpulse. Aus der definierten

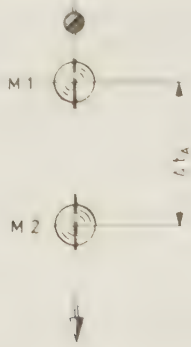



Bild 6.4: Zwei Impulse des gleichen Teilchens

Wegdifferenz ( = Abstand beider Strahlen) und der gemessenen Zeitdifferenz der Streulichtimpulse kann eine mittlere Geschwindigkeit bestimmt werden. Aufgrund der sehr geringen Abmessungen des Meßvolumens (siehe Bild 6.3) liegt dabei praktisch eine punktuelle Geschwindigkeitsbestimmung vor.

Falls die Lichtzonen sich in Strömungsrichtung nicht genau hintereinander befinden oder die Strömung sehr stark turbu-

lent ist, können Fehlmessungen entstehen. In Bild 6.5 hat ein Teilchen den Strahl M1 durchlaufen, ein zweites durchläuft unabhängig davon zu einem beliebigen Zeitpunkt den Strahl M2. Die in einem solchen Fall gemessene Zeit gibt

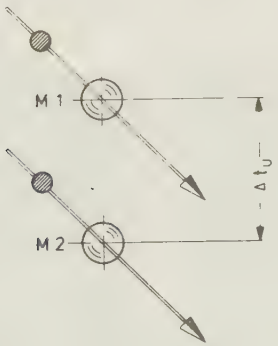



Bild 6.5: Impulse von zwei unabhängigen Teilchen

dann keine Information über die Strömungsgeschwindigkeit.

Bei einer einzelnen Messung ist es nicht entscheidbar,ob der Fall nach Bild 6.4 oder nach Bild 6.5 vorliegt. Die Speicherung von vielen Meßwerten liefert jedoch eine Häufigkeitsverteilung der gemessenen Zeiten. Da im Fall von Bild 6.5 zwei von einander unabhängige Teilchen die Impulse auslösen und die Teilchen als statistisch verteilt im Fluid angenommen werden können, sind die auf diese Weise gemessenen Zeitintervalle rein zufällig und nehmen gleichmäßig alle Werte im Meßbereich an. Die Messungen nach Bild 6.4 heben sich jedoch von diesen statistisch gleichverteilten Werten

ab, da sie kein zufälliges, sondern ein der Strömungsgeschwindigkeit entsprechendes Zeitintervall darstellen. Nach sehr vielen Einzelmessungen, die automatisch von der Meßelektronik durchgeführt und statistisch ausgewertet werden, entsteht in der Umgebung der Zeitdifferenz, die der tatsächlichen Strömungsgeschwindigkeit entspricht, eine von der Strömungsform abhängige Anhäufung von Meßwerten (Bild 6.6). Für laminare Strömungen ist die Häufigkeits-

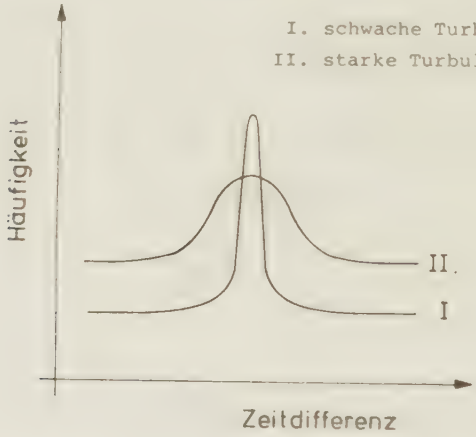


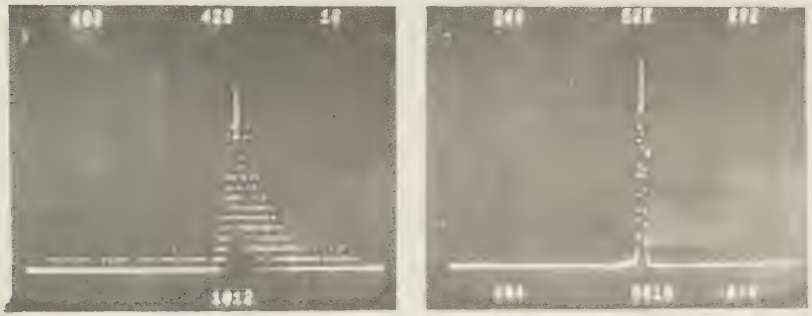

Bild 6.6: Verteilungskurven gemessener Impulsfolgen

verteilung schmal, während für turbulente Strömungen infolge der vermehrten Schwankungsbewegung der Teilchen die Verteilung verbreitert auftritt.

Da selbst bei geringer Abweichung der Lichtschranke von der tatsächlichen Strömungsrichtung keine Spitze der aufgenommenen Häufigkeitsverteilung mehr festgestellt werden kann, ist es möglich, durch eine Vielzahl von Messungen unter Drehung der beiden Strahlen M1 und M2 um M1 als Ro-

tationsachse die Richtung der Strömung in zwei Komponenten zu bestimmen. Die dritte Komponente ist durch eine weitere geeignete Meßstrahlrichtung zu ermitteln.

Bild 6.7 zeigt als Beispiel zwei typische Verteilungen für Strömungen mit unterschiedlichen Turbulenzgraden, die vom Bildschirm des elektronischen Auswertegerätes abfotografiert wurden.



starke Turbulenz schwache Turbulenz

Bild 6.7: Aufgenommene Häufigkeitsverteilungen der gemessenen Zeitintervalle bei Strömungen mit unterschiedlichen Turbulenzgraden

Zur exakten Positionierung des Meßvolumens auf definierte Punkte in der Umlenkung wurde das L2F-Gerät auf eine 5-achsig steuerbare Traversiereinrichtung aufgesetzt. Das Bild 6.8 zeigt den Zusammenbau der gesamten Meßapparatur. Alle drei möglichen translatorischen Bewegungen werden von Schrittmotoren gesteuert, die mit Zählwerk, Digitalanzeige und vorprogrammierbaren Schaltern ausgestattet sind. Auch die beiden eingezeichneten Rotationsbewegungen werden von Schrittmotoren ausgeführt. Die dritte noch mögliche Rotationsbewe-

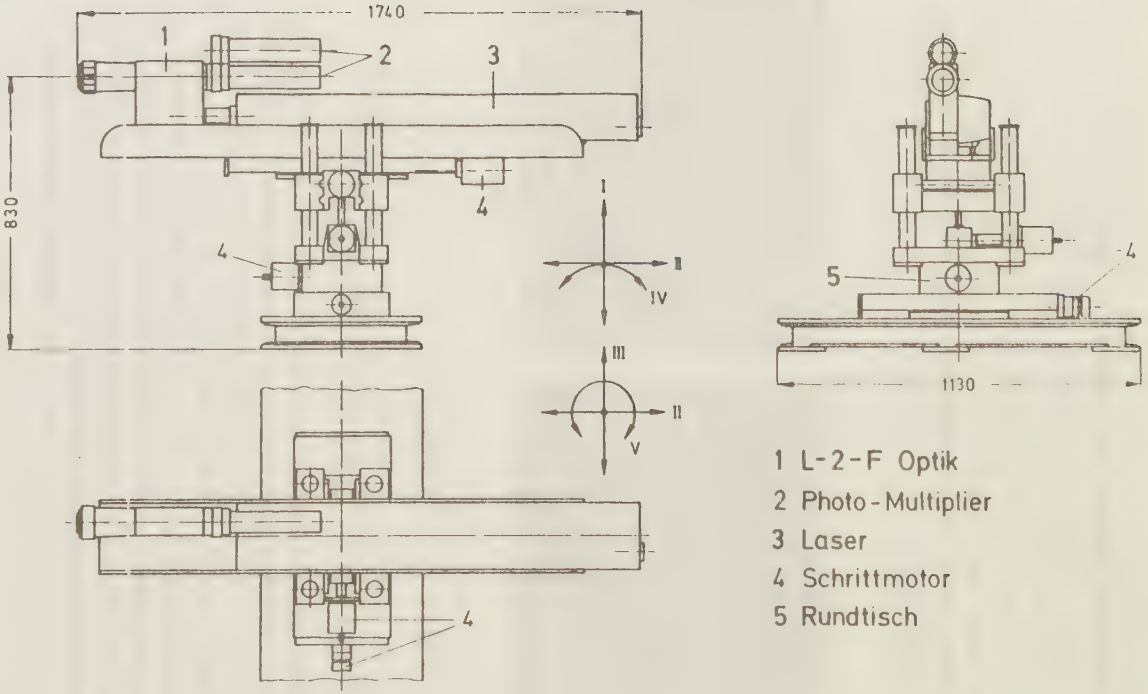
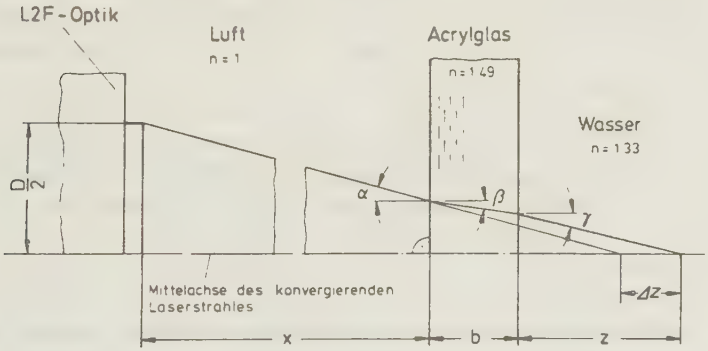



Bild 6.8: Traversiereinrichtung und aufgesetztes L2F- Meßgerät

gung ist, wie bereits erwähnt, durch die Drehung der beiden Laserstrahlen M1 und M2 um M1 gegeben.

Jede gewünschte Position des Meßvolumens kann mit Hilfe dieser Einrichtung sehr exakt und reproduzierbar selbsttätig angefahren werden. Die Einstellkoordinaten für die Traversiereinrichtung werden von einem Rechnerprogramm ermittelt, da bei dem vorliegenden Versuchsstand die Position des Meßvolumens nicht nur durch die Stellung der Traversiereinrichtung, sondern auch durch optische Gesetze festgelegt wird. Bei der Geschwindigkeitsmessung durchdringt der Laserstrahl drei Medien von unterschiedlicher optischer Dichte. Bild 6.9 zeigt im Fall einer senkrecht auf das




$$x = \frac{1}{\tan\alpha}\left[\frac{D}{2} + z\cdot\tan\gamma - b\cdot\tan\beta\right]$$

Bild 6.9: Unterschiedliche Brechung des Laserstrahls in Luft, Plexiglas und Wasser

Sichtfenster auftreffenden Mittelachse des konvergierenden Laserstrahls, daß der Strahl die Luft, das Plexiglas-

fenster mit der Breite b und das Wasser selbst durchdringen muß. Liegt ein gewünschter Meßpunkt im Wasser bei der Eindringtiefe z, so kann die Einstellkoordinate x zwischen Laseroptik und der Vorderkante der Glasscheibe durch die Beziehung

$$x = \frac{1}{\tan \alpha} \cdot \left( \frac{D}{2} + z \cdot \tan \gamma - b \cdot \tan \beta \right) \qquad (37)$$

bestimmt werden /66/. Dabei ist der Konvergenzwinkel $\alpha$ im Medium Luft durch die Laseroptik vorgegeben und beträgt bei der hier verwendeten Kamera $\alpha = 1{,}2^{\circ}$. Die Winkel $\gamma$ und $\beta$ sind durch die Brechungsindizes von Luft, Plexiglas und Wasser festgelegt. Aus Bild 6.9 und der Beziehung (37) ist zu entnehmen, daß einer Bewegung der Laseroptik zum Sichtfenster hin nicht eine gleich große Bewegung des Meßvolumens im Wasser entspricht, solange die Winkel $\alpha$ und $\gamma$ voneinander verschieden sind.

Neben einer Verschiebung $\Delta z$ führt der Strahldurchgang noch zu einer Veränderung der Geometrie des Meßvolumens /66/. Im Fall der senkrechten Lasereinstrahlung wird das Meßvolumen axial, also in Richtung des Strahls, verlängert und radial verkürzt.

Trifft die Mittelachse des Strahls nicht mehr senkrecht auf das Sichtfenster auf, so besitzt Beziehung (37) keine Gültigkeit mehr. Die Veränderung der Geometrie des Meßvolumens begrenzt die maximale Abweichung von der senkrechten Einstrahlrichtung nach /66/ auf etwa $18^{\circ}$. Dieser Winkel wird bei der vorliegenden Versuchseinrichtung trotz teilweise gekrümmter Sichtfenster nicht erreicht.

## 7. Darstellung von Rechen- und Meßergebnissen

Für die 180°- Umlenkung des in Abschnitt 6.1 beschriebenen Versuchsstandes sind Rechnungen mit verschiedenen Zuströmbedingungen durchgeführt und zum Teil mit Messungen verglichen worden. Die betrachteten Fälle zeigt Bild 7.1 in einer Übersicht. Die Zuströmung zu der 180°- Umlenkung unterscheidet sich jeweils bezüglich der Geschwindigkeitsverteilungen über der Kanalbreite und über dem Umfang. In den beiden ersten Fällen stammen die der Rechnung vorgegebenen Eintrittsprofile aus Messungen, so daß hier ein Vergleich zwischen Rechnung und Messung angestellt werden kann.

Fall 1 umfaßt drei drallfreie Strömungen mit qualitativ ähnlicher Form des Eintrittsprofils, die sich bezüglich des Volumenstroms, der am Versuchsstand eingestellt wurde, unterscheiden. Die entsprechenden Reynoldszahlen sind in dem Bild angegeben.

Unter Fall 2 werden entsprechend drei drallbehaftete Strömungen, ebenfalls bei unterschiedlichen Volumenströmen, betrachtet. Die Fälle 3 bis 7 stellen hypothetische, nicht experimentell untersuchte Strömungen dar.

Die zur Charakterisierung der Strömung verwendete Reynoldszahl Re wird nicht mit der mittleren Durchströmungsgeschwindigkeit, die sich aus dem Volumenstrom entsprechend der Kontinuitätsgleichung ergibt, gebildet, da sonst die höhere resultierende Geschwindigkeit einer drallbehafteten Strömung gegenüber einer drallfreien Strömung bei gleichem Volumendurchsatz nicht berücksichtigt würde. Vielmehr wird eine Reynoldszahl am Austritt des Schaufelkranzes , der etwa dem Eintritt in die Umlenkung entspricht, nach Bild 7.2 gebildet. Die zur Definition dieser Zahl verwendete Geschwindigkeit c ist die mittlere Geschwindigkeit am Austritt des

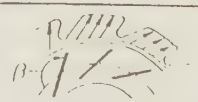
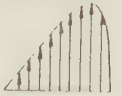
| Fall Nr. | Zuströmung | Eintrittsprofil über Umfang | Eintrittsprofil über Breite | | | Re |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 (Rechnung u. Messung) | Drallfrei | periodisch mit Nachlaufdelle | Maximum am Kanal-außenrand | | | a) $0{,}989 \cdot 10^5$<br>b) $1{,}339 \cdot 10^5$<br>c) $1{,}750 \cdot 10^5$ |
| 2 (Rechnung u. Messung) | mit Drall | periodisch mit Nachlaufdelle | Maximum in Kanalmitte |  | | a) $1{,}150 \cdot 10^5$<br>b) $1{,}670 \cdot 10^5$<br>c) $1{,}752 \cdot 10^5$ |
| 3 (Rechnung) | Drallfrei | konstant ohne Nachlaufdelle | Maximum in Kanalmitte | | | $1{,}970 \cdot 10^5$ |
| 4 (Rechnung) | Drallfrei | konstant ohne Nachlaufdelle | Maximum am Kanalinnenrand | | | $1{,}970 \cdot 10^5$ |
| 5 (Rechnung) | Drallfrei | periodisch mit Nachlaufdelle | Maximum in Kanalmitte | | | $1{,}797 \cdot 10^5$ |
| 6 (Rechnung) | Drallfrei | periodisch mit Nachlaufdelle | Maximum am Kanalinnenrand | | | $1{,}797 \cdot 10^5$ |
| 7 (Rechnung) | Drallfrei | konstant ohne Nachlaufdelle | Maximum am Kanal-außenrand | |  | $1{,}970 \cdot 10^5$ |

Bild 7.1: Zusammenstellung der betrachteten Fälle

Schaufelkanals, die nicht der Meridiankomponente entspricht, sondern sich aus Meridian- und Umfangskomponente zusammensetzt. Als Längenmaß wird der hydraulische Durchmesser am Austritt eines Schaufelkanals gewählt. Dieser Durchmesser

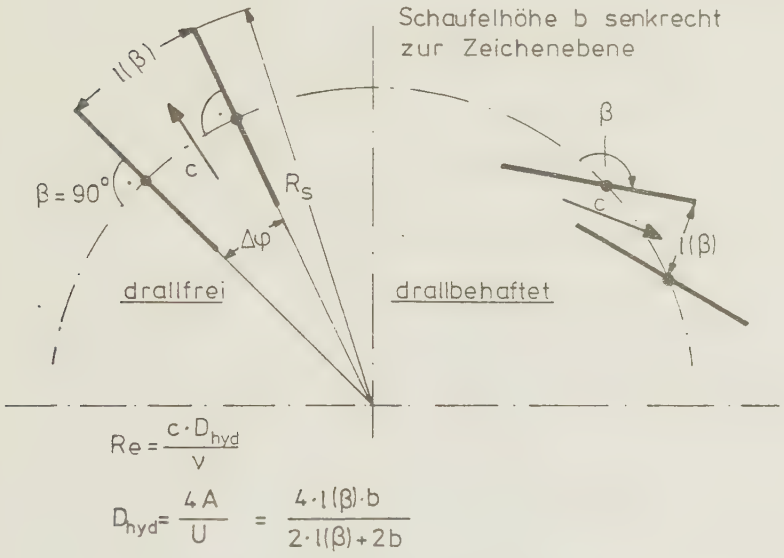



Bild 7.2: Definition der Reynoldszahl

ist von der Stellung der Leitschaufeln (Winkel β) abhängig. Nach Bild 7.2 gilt:

$$Re = \frac{2 \cdot c \cdot l(\beta) \cdot b}{\nu \cdot (l(\beta) + b)}$$

Für $l(\beta)$ gilt in guter Näherung

$$l(\beta) = l(\beta = 90^{\circ}) \cdot \sin \beta$$

Mit

$$l(\beta=90^{\circ}) = \angle\varphi \cdot R_s$$

folgt daher

$$Re = \frac{2 \cdot c \cdot b \cdot \Delta\varphi \cdot R_s \cdot \sin \beta}{\nu \cdot (\Delta\varphi \cdot R_s \cdot \sin \beta + b)}$$

Für den Volumenstrom $\dot{V}_s$ durch einen Schaufelkanal gilt

$$\dot{V}_s = c \cdot \sin \beta \cdot b \cdot \Delta\varphi \cdot R_s$$

so daß die Reynoldszahl durch den Ausdruck

$$Re = \frac{2 \cdot \dot{V}_s}{\nu \cdot (\Delta\varphi \cdot R_s \cdot \sin \beta + b)}$$

berechnet werden kann. In Bild 7.1 ist diese Reynoldszahl für alle betrachteten Fälle angegeben.

Das in allen Rechnungen verwendete numerische Gitter ist in Bild 7.3 dargestellt. Es umfaßt den Bereich einer Teilung,

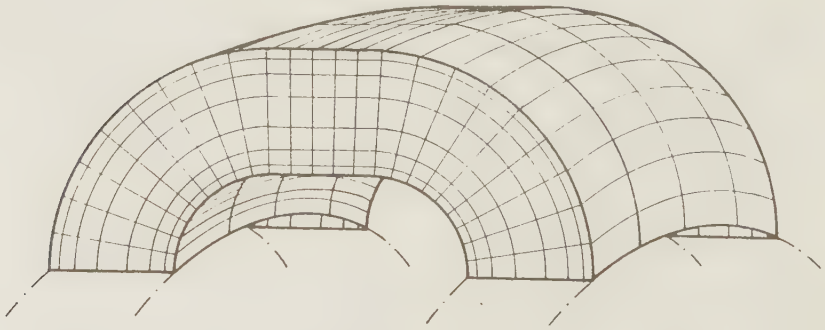


Bild 7.3: Verwendetes Rechengitter

die bei dem Versuchsstand $10^{o}$ beträgt (36 Schaufeln). Die Lösung für die drei Geschwindigkeitskomponenten und den statischen Druck wird jeweils auf 5 x 24 x 8 = 960 Gitterpunkten bestimmt, so daß nach jeder Rechnung 4 x 960 = 3840 Geschwindigkeits- bzw. Druckwerte zur Beschreibung der Strömung zur Verfügung stehen.

## 7.1. Vergleich von Rechen- und Meßergebnissen

### 7.1.1. Drallfreie Strömung

Bei den Messungen unter Fall 1 ist die $180^{o}$- Umlenkung des beschriebenen Versuchsstandes drallfrei durchströmt worden. Dabei wurden drei verschiedene Volumenströme eingestellt:

Fall 1a: $\dot{V} = 0{,}131\ m^3/s$

Fall 1b: $\dot{V} = 0{,}177\ m^3/s$

Fall 1c: $\dot{V} = 0{,}232\ m^3/s$

Damit ergibt sich für die mittlere Geschwindigkeit am Eintritt in die Umlenkung entsprechend:

Fall 1a: $\bar{c} = 2{,}78\ m/s$

Fall 1b: $\bar{c} = 3{,}76\ m/s$

Fall 1c: $\bar{c} = 4{,}92\ m/s$

In allen drei Fällen sind jeweils die räumlichen Geschwindigkeitsprofile an den in Bild 6.2 dargestellten Meßstellen 1, 2 und 3 mit Hilfe des Laser-2-Fokus-Verfahrens abgetastet worden. Das am Eintritt in die Umlenkung (Stelle 1) gemessene

Geschwindigkeitsprofil ist jeweils der Rechnung vorgegeben worden. Die Ergebnisse dieser Untersuchungen zeigen die folgenden Bilder 7.4, 7.5 und 7.6. Die Meßergebnisse sind durch gestrichelte, die Rechenergebnisse durch Vollinien dargestellt. An den drei Meßstellen sind dabei die Isotachen des jeweiligen Geschwindigkeitsprofils im Bereich einer Schaufelteilung gezeichnet. Zusätzlich ist in den Meridianschnitt des Kanals jeweils das Geschwindigkeitsprofil eingezeichnet, das im Schnitt A-A vorliegt. In allen drei Fällen wurde ein Eintrittsprofil ähnlicher Form gemessen. Das Maximum ist durch die vorangehende Umlenkung in die radiale Richtung zur Außenwand des Kanals hin verschoben. In Umfangsrichtung zeigt sich jeweils der Einfluß von Nachlaufdellen.

Nach der ersten $90^{\circ}$-Umlenkung haben sich die Maxima der Geschwindigkeitsprofile noch weiter nach außen bis unmittelbar an die Wand verschoben. Durch die relativ scharfe Umlenkung hat sich außerdem in allen drei Fällen am Innenrand des Kanals eine Ablösezone gebildet. Diese Ablösegebiete sind im Versuch dadurch sichtbar gemacht worden, daß an einer Stelle des Umfangs des Versuchsstandes Fäden in die Innenkontur der Umlenkung eingeklebt worden sind, die durch Plexiglasfenster beobachtet werden können. Die Ablösung erfolgt jeweils unmittelbar nach der ersten $90^{\circ}$- Umlenkung. Zu Beginn der zweiten $90^{\circ}$- Umlenkung legt sich die Strömung jedoch wieder an die Innenkontur an, da an dieser Stelle auch eine Beschleunigung des Fluids einsetzt, die durch den bei der Durchströmung der zweiten $90^{\circ}$- Krümmung abnehmenden Querschnitt verursacht wird.

Die berechneten Geschwindigkeitsprofile zeigen insgesamt gute Übereinstimmung mit den gemessenen. Im Bereich der in der Messung festgestellten Ablösegebiete ergeben die Rechnungen in den Fällen 1a und 1c noch sehr geringe positive

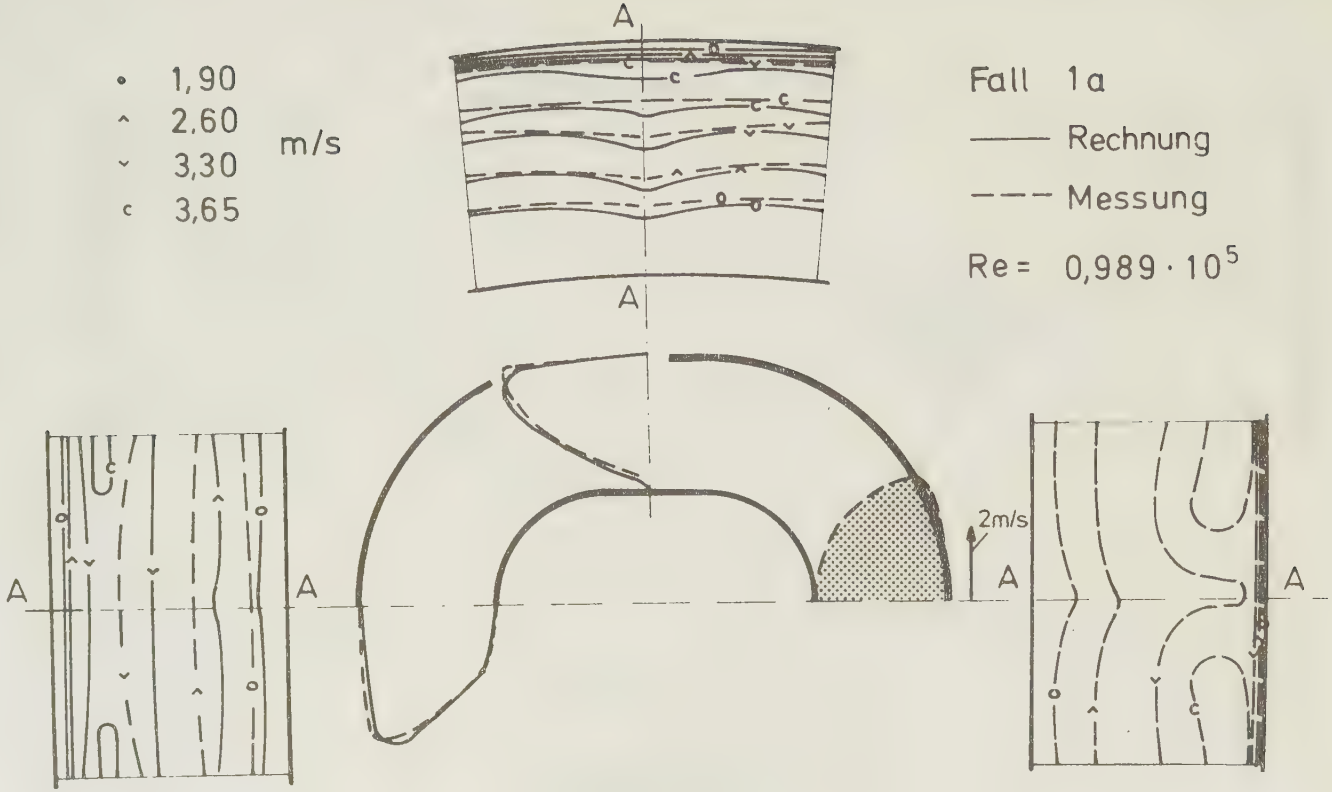



Bild 7.4: Rechen- und Meßergebnisse für Fall 1a

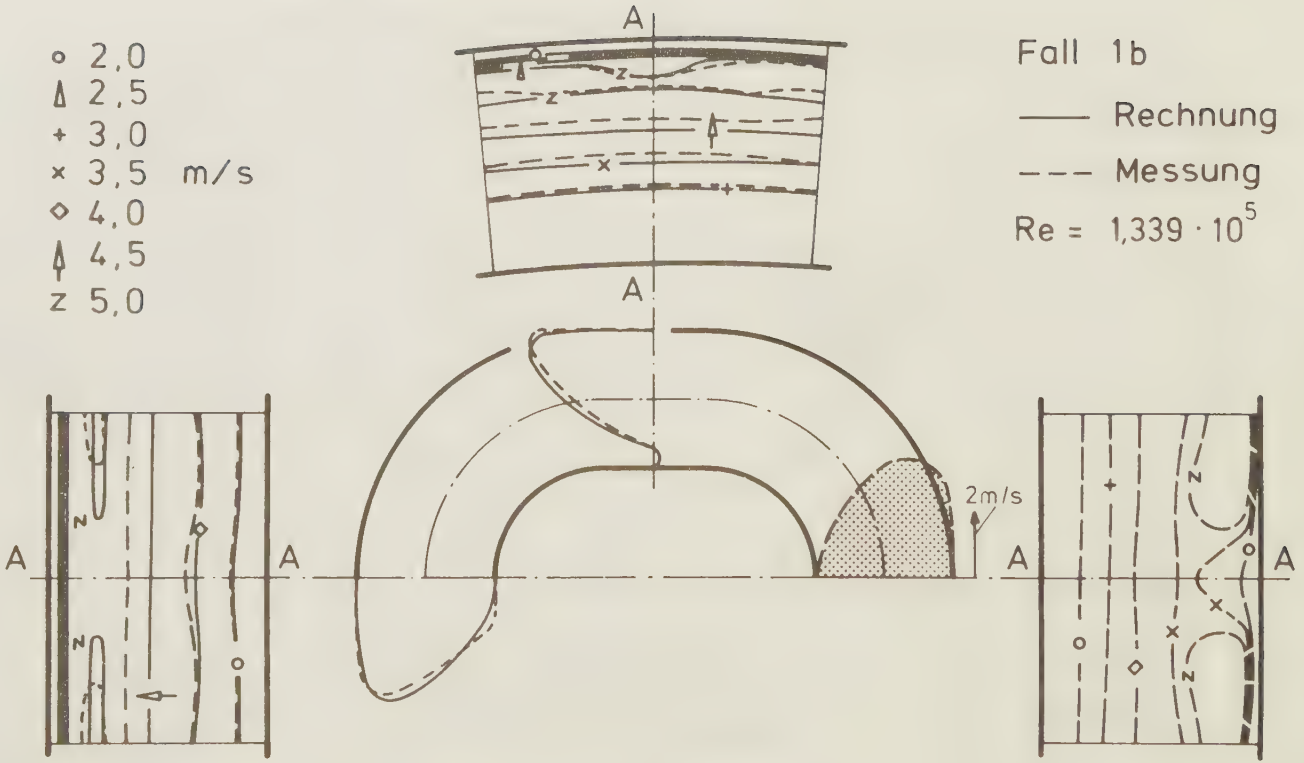



Bild 7.5: Rechen- und Meßergebnisse für Fall 1b

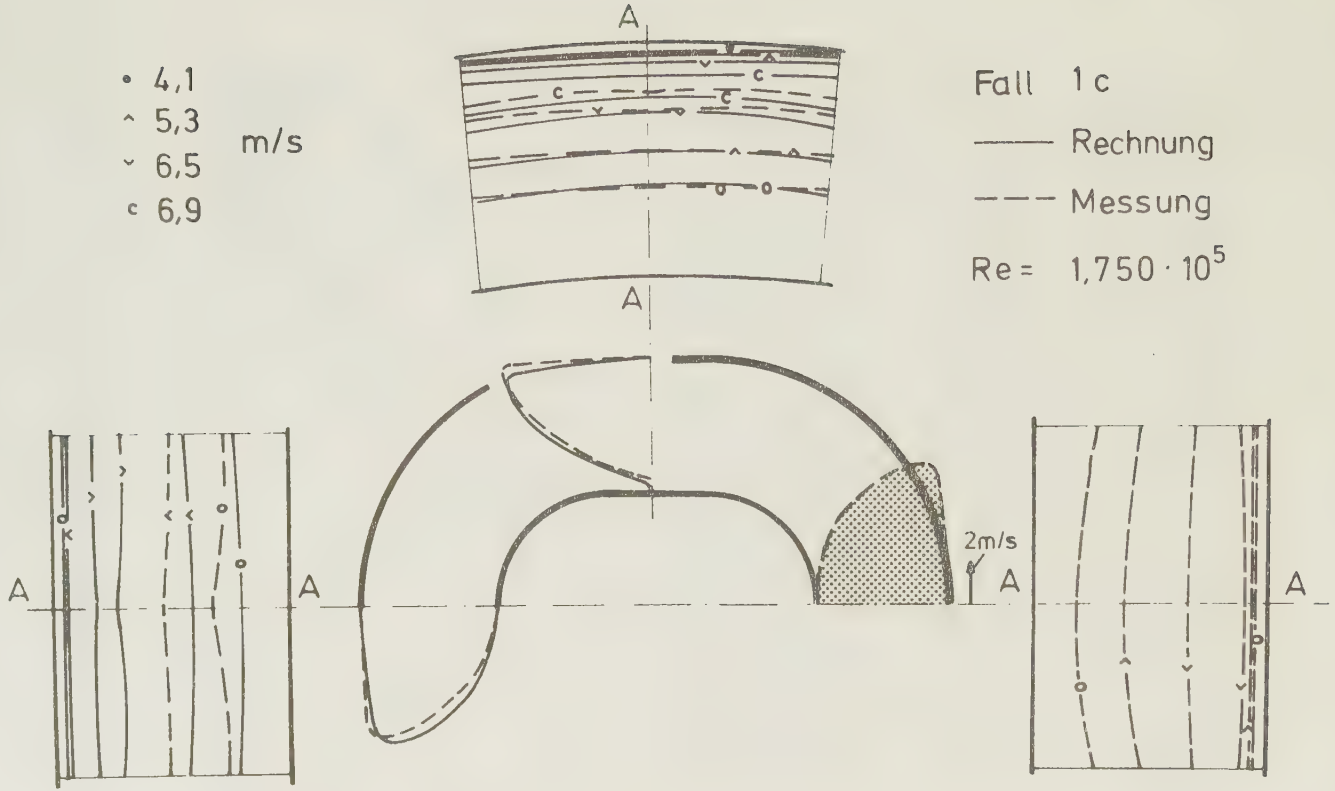



Bild 7.6: Rechen- und Meßergebnisse für Fall 1c

Geschwindigkeitskomponenten in Durchflußrichtung, in Fall 1b werden jedoch sogar geringe negative Geschwindigkeiten berechnet. Trotz dieses also auch in der Rechnung auftretenden kleinen Rückströmgebietes konvergiert das Lösungsverfahren unter den hier vorliegenden Bedingungen. Dies ist bei kleinen Rückströmgebieten möglich, da das in Abschnitt 4.1.1 angegebene Zeilensummenkriterium, das bei u > 0 erfüllt ist und die Konvergenz des iterativen SOR-Verfahrens sicherstellt, nur eine hinreichende, aber keine notwendige Bedingung für die Konvergenz des Verfahrens darstellt.

Der Vergleich der berechneten und der gemessenen Geschwindigkeitsprofile an den Stellen 2 und 3 zeigt, daß die gemessenen Maxima der Profile noch näher an der Außenkontur liegen als die Rechnung ergibt. Das berechnete Profil tendiert also mehr zu dem Charakter eines laminaren Profils mit dickerer Grenzschicht. Dies ist auf das verwendete, relativ einfache Turbulenzmodell zurückzuführen.

Für den Fall mittleren Volumenstroms 1b ist in Bild 7.7 die

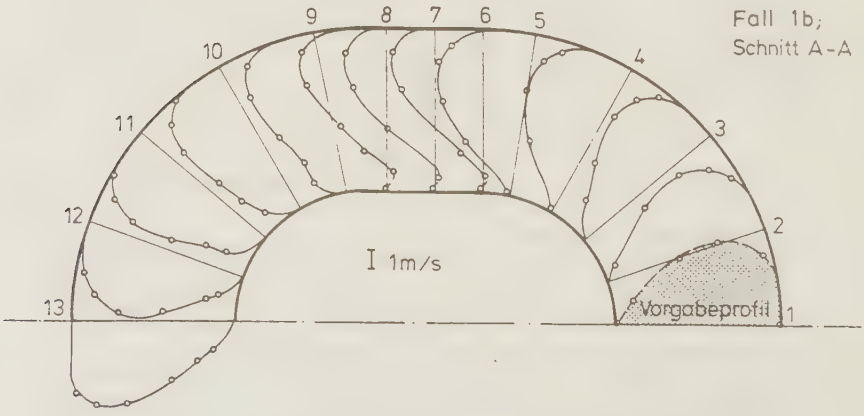



Bild 7.7: Vollständige Entwicklung des Meridianprofils im Fall 1b (Rechnung)

vollständige Entwicklung der Geschwindigkeitsprofile zwischen Ein- und Austritt der Umlenkung im Meridianschnitt dargestellt, wie sie sich aus der Rechnung ergibt. Das kleine Rückströmgebiet nach der ersten $90^{\circ}$- Umlenkung ist darin zu erkennen.

Da das Laser-2-Fokus-Verfahren infolge der statistischen Auswertung der Meßwerte Aussagen über die örtliche Turbulenzstruktur einer Strömung machen kann, wurde bei allen drei Messungen unter Fall 1 festgestellt, daß der Turbulenzgrad an jeder der drei Meßstellen 1, 2 und 3 von der Außenkontur zur Innenkontur der Umlenkung hin stark zunimmt. Die Breite der Häufigkeitsverteilung der gemessenen Zeitintervalle, die das Maß für den Turbulenzgrad darstellt nimmt also zu, je weiter sich die betrachtete Stelle der Innenkontur nähert. Für die Meßstelle 3 (Austritt des Umlenkkanals) in Fall 1b zeigt dies Bild 7.8. Für verschiedene Abstände von der Außenkontur x/b sind

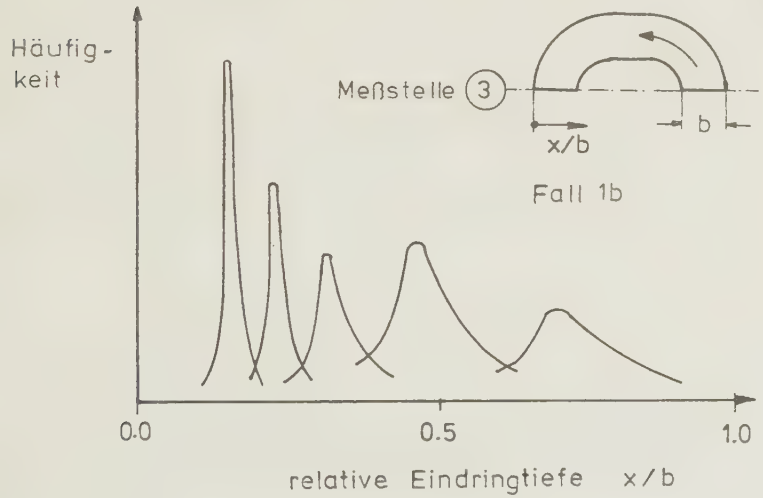



Bild 7.8: Darstellung der unterschiedlichen Turbulenzstruktur über der Kanalbreite

die gemessenen Häufigkeitsverteilungen eingezeichnet, die vom Bildschirm des elektronischen Auswertegerätes übernommen worden sind. Die stark unterschiedliche Turbulenzstruktur an Innen- und Außenrand ist deutlich zu erkennen.

### 7.1.2. Drallbehaftete Strömung

Die Fälle 2a, 2b und 2c beinhalten drallbehaftete Durchströmungen des Versuchsstandes. Bei den Messungen ist die Einstellung des justierbaren Leitschaufelkranzes geändert worden. Die eingestellten Drallwinkel in den drei Fällen betragen:

$\beta = 135^{\circ}$ in Fall 2a

$\beta = 140^{\circ}$ in Fall 2b

$\beta = 135^{\circ}$ in Fall 2c

Für die Volumenströme gilt:

$V = 0{,}126\ m^3/s$ in Fall 2a

$V = 0{,}174\ m^3/s$ in Fall 2b

$V = 0{,}192\ m^3/s$ in Fall 2c

Dies entspricht einer mittleren Meridiangeschwindigkeit am Eintritt in die Umlenkung (Stelle 1) von:

$\bar{c}_m$ = 2,67 m/s in Fall 2a

$\bar{c}_m$ = 3,70 m/s in Fall 2b

$\bar{c}_m$ = 4,07 m/s in Fall 2c

Nach Abtastung der Geschwindigkeitsprofile jeweils an den Meßebenen 1, 2 und 3 in allen drei Fällen sind die am Eintritt der Umlenkung bestimmten Profile der Rechnung vorgegeben worden. Die Ergebnisse aus Messung und Rechnung zeigen die Bilder 7.9, 7.10 und 7.11. Das Eintrittsprofil unterscheidet sich jeweils deulich von den Profilen der drallfreien Strömung.Die Profile sind gleichförmiger über der Kanalbreite und die Verlagerung des Maximums an die Außenkontur ist an keiner Stelle so stark ausgeprägt wie im drallfreien Fall. Es ist auch kein Ablösegebiet mehr festgestellt worden. Die Turbulenzverteilung ist ebenfalls wesentlich gleichförmiger: die gemessenen Häufigkeitsverteilungen ändern ihre Form über der Kanalbreite nur wenig. Diese Erscheinungen weisen darauf hin, daß der Einfluß der Krümmung auf die Strömung hier geringer ist als im drallfreien Fall. Dies ist auf den in Umfangsrichtung im Vergleich zur Meridianrichtung wesentlich geringeren mittleren Krümmungsradius zurückzuführen. Der Krümmungsradius in Meridianrichtung, der repräsentativ für die drallfreie Strömung ist, beträgt in Kanalmitte O,o385 m. In Umfangsrichtung beträgt er etwa O,277 m, also mehr als das siebenfache. Entsprechend dem Drallwinkel nimmt der mittlere Krümmungsradius einer Stromlinie nun einen Wert zwischen diesen Extremen an. Mit steigendem Drallwinkel wird daher der Krümmungsradius der einzelnen Stromlinie kleiner.

Um den dreidimensionalen Charakter der Drallströmung darzustellen, ist in Bild 7.12 für den Fall mittleren Volumenstroms 2b der rechnerische Verlauf von resultierender Geschwindigkeit c, Drallwinkel $\beta$ und Umfangskomponente $c_u$ an fünf Stellen der Umlenkung gezeichnet worden. Bild 7.13 zeigt zusätzlich

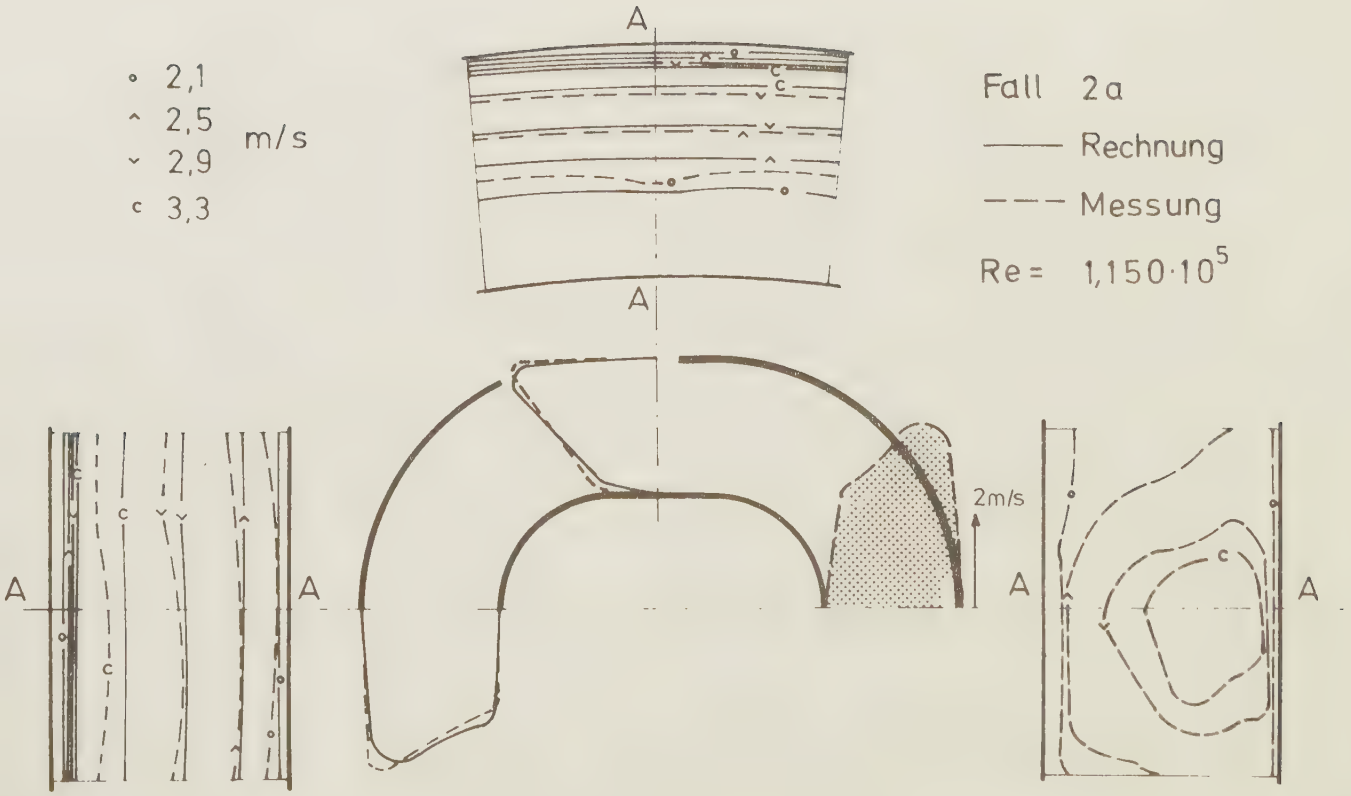



Bild 7.9: Rechen- und Meßergebnisse für Fall 2a

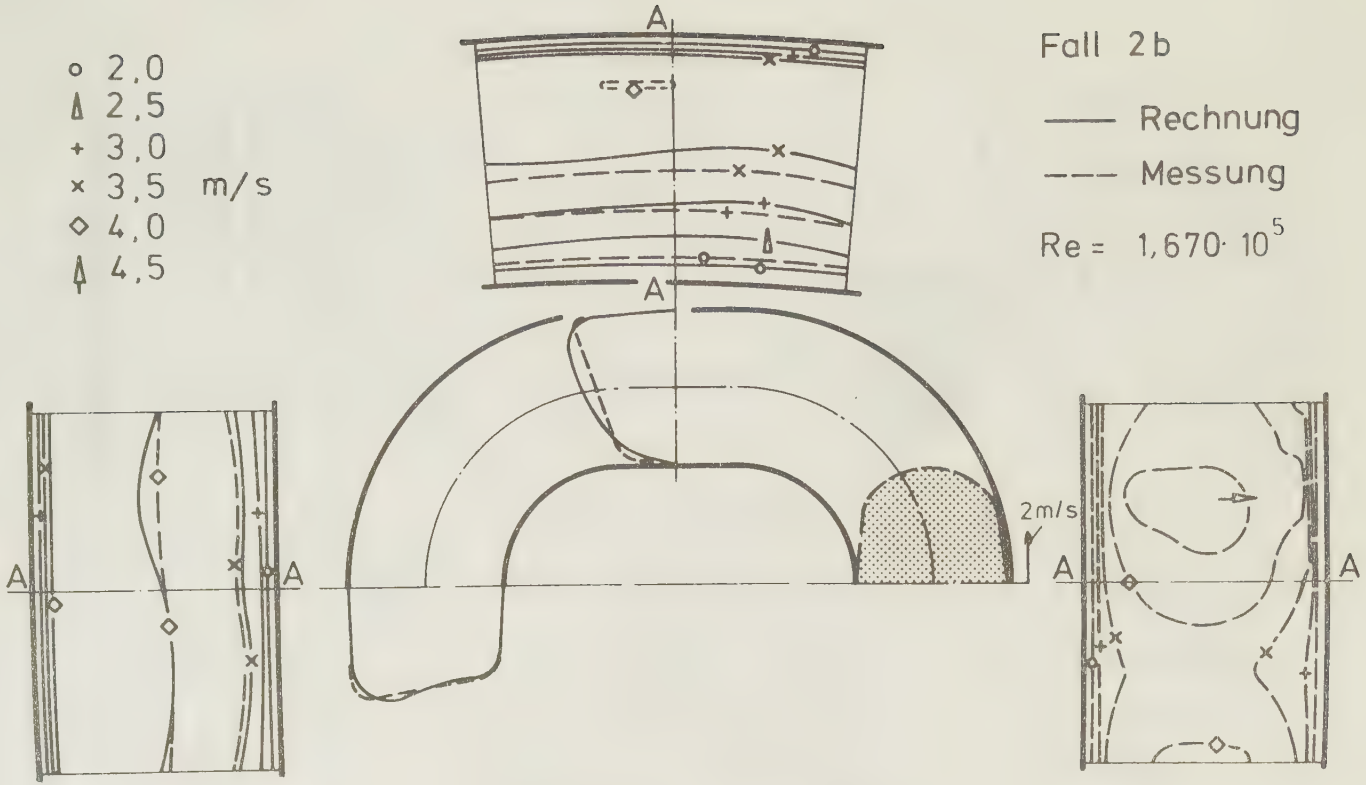



Bild 7.10: Rechen- und Meßergebnisse für Fall 2b

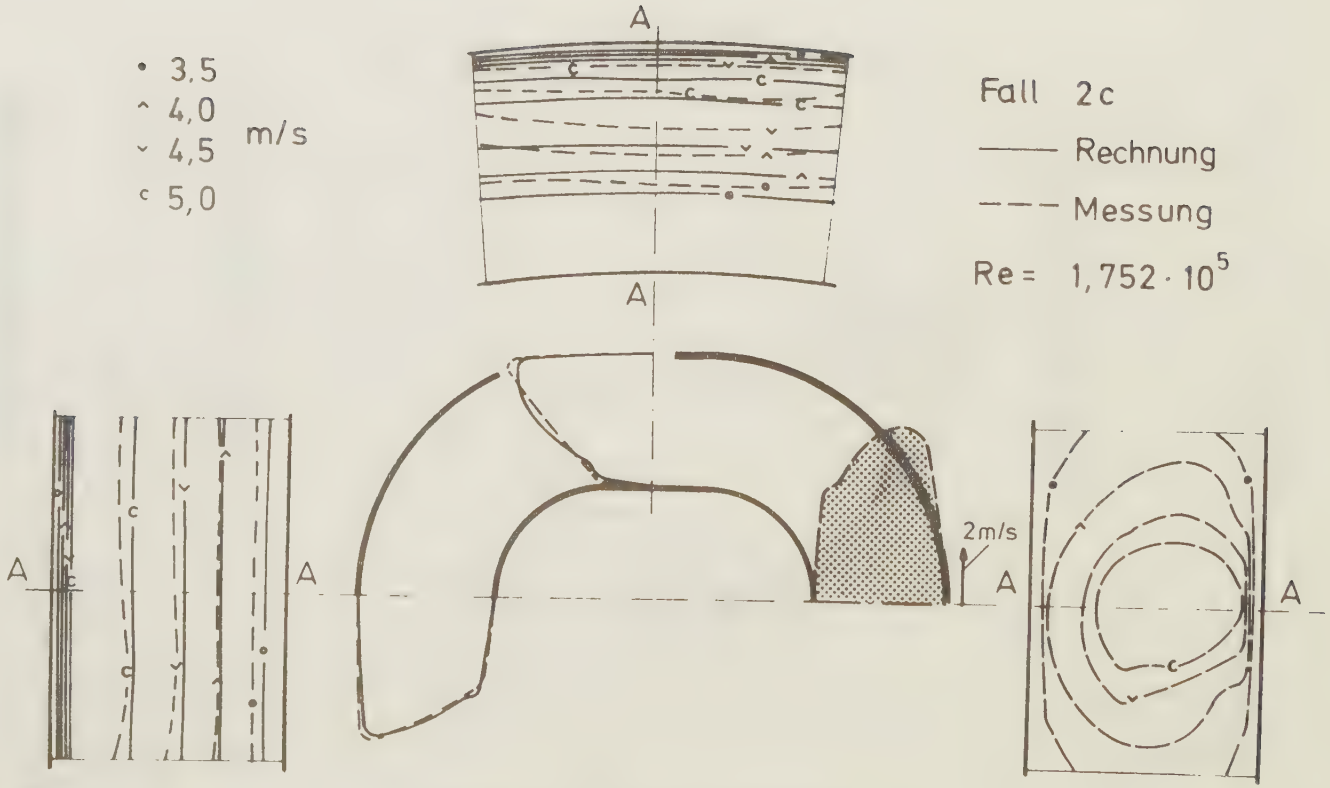



Bild 7.11: Rechen- und Meßergebnisse für Fall 2c

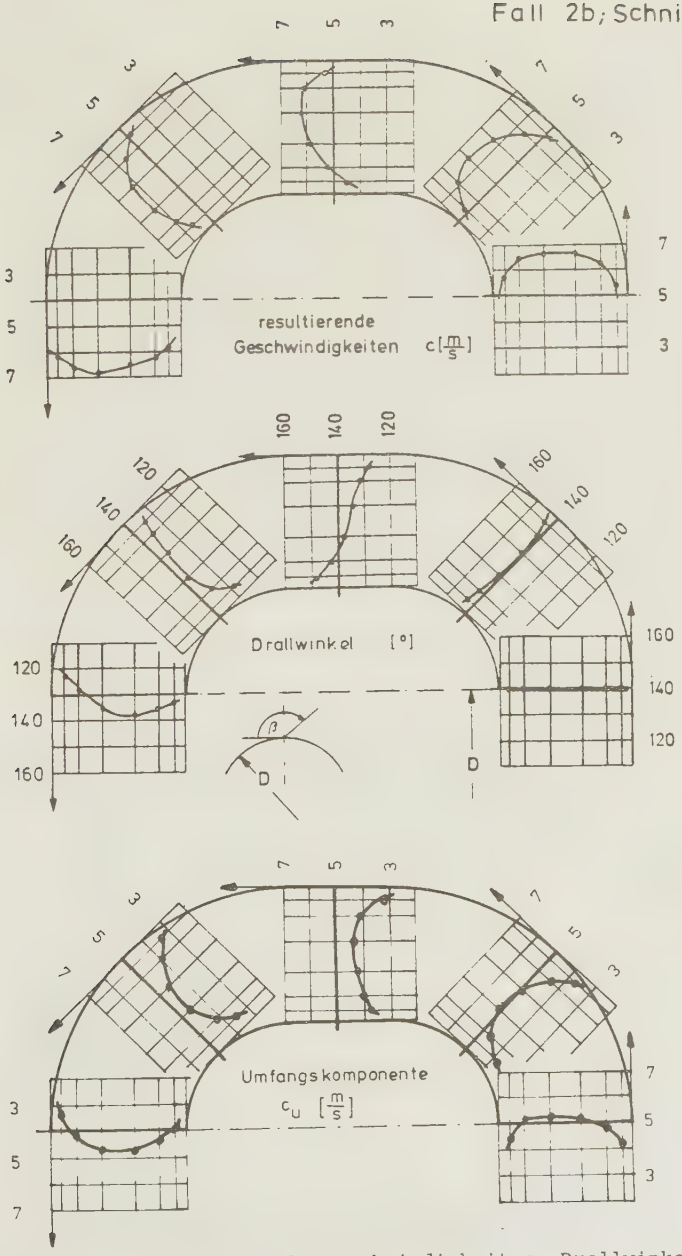



Bild 7.12: Resultierende Geschwindigkeit c, Drallwinkel β und Umfangskomponente $c_u$ für Fall 2b (Rechnung)

in einer anderen Darstellung die vollständige Entwicklung des Meridianprofils für diesen Fall. Sehr deutlich ist der über der Kanalbreite stark unterschiedliche Drallwinkel im oberen geraden Teil der Umlenkung zu erkennen (Stelle 2). An der Innenkontur hat sich der Drallwinkel im Vergleich zum Eintritt (Stelle 1) stark vergrößert, an der Außenkontur verkleinert. Der Grund dafür liegt in der Tatsache, daß sich die Meridiankomponente $c_m$, die einer stärkeren Krümmung ausgesetzt ist, mehr an den Krümmungsaußenrand verlagert als die Umfangskomponente $c_u$. Da der Drallwinkel durch das Verhältnis von $c_m$ zu $c_u$ bestimmt ist, ergibt sich am Außenrand ein kleinerer Drallwinkel, während innen die Umfangskomponente dominiert. Dies entspricht auch den Beobachtungen an Radialverdichterrädern, wo die Strömung nach dem Austritt aus dem Laufrad auf der Radscheibenseite, also am Außenrand der Umlenkung, weniger Drall aufweist als an der Deckscheibenseite /67/.

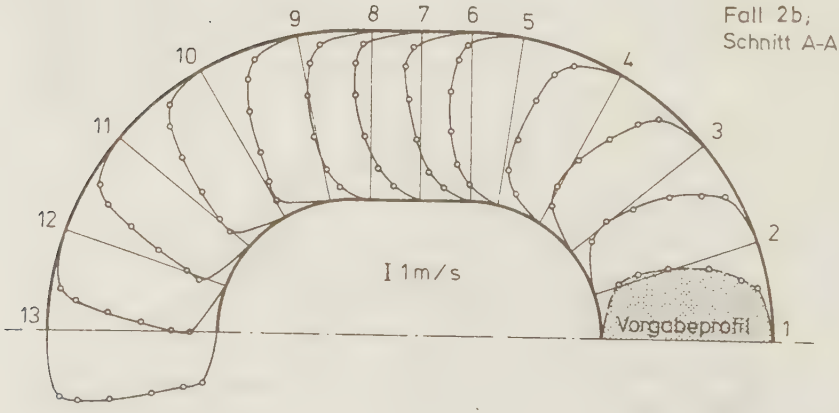



Bild 7.13: Vollständige Entwicklung der Meridiangeschwindigkeit im Fall 2b (Rechnung)

Insgesamt nimmt die mittlere $c_u$-Komponente im Vergleich zwischen Ein- und Austritt der Umlenkung etwas ab; das gleiche gilt entsprechend für den Drallwinkel. Die mittlere Meridiangeschwindigkeit bleibt jedoch aufgrund der Kontinuitätsbedingung erhalten.

Bild 7.14 zeigt den Vergleich von Rechen- und Meßergebnissen für den Verlauf des Drallwinkels β über der Kanalbreite. Es ist zu erkennen, daß der vor allem an Meßstelle 2 an Innen- und Außenrand des Kanals stark unterschiedliche Drallwinkel

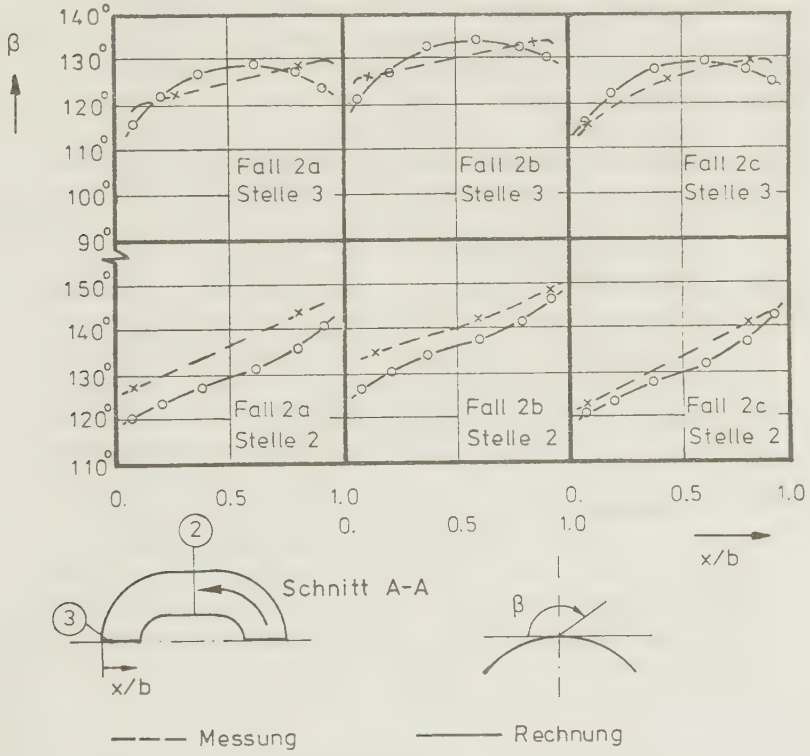



Bild 7.14: Vergleich von Rechen- und Meßergebnissen für den Drallwinkel

auch in der Messung deutlich registriert wird. An Meßstelle 3 wird eine annähernd lineare Änderung des Drallwinkels über der Kanalbreite gemessen, während die Rechnung einen runderen Verlauf ergibt. Dies weist wieder auf die bereits erwähnte Tendenz der Rechnung zu dickeren Grenzschichten hin.

Da mit bekannter Meridiankomponente und bekanntem Drallwinkel ebenfalls die Umfangskomponente und die resultierende Geschwindigkeit bestimmt sind, stellt Bild 7.14 im Zusammenhang mit dem Vergleich von Messung und Rechnung aus den Bildern 7.9, 7.10 und 7.11 eine Bestätigung dafür dar, daß das Rechenmodell den dreidimensionalen Charakter der Strömung richtig erfaßt.

Da die berechneten Geschwindigkeitsprofile im allgemeinen dickere Grenzschichten aufweisen als die gemessenen, ist in weiteren Rechnungen noch der Einfluß zunehmender Reynoldszahl auf die Grenzschichtdicke, wie er durch das Rechenverfahren modelliert wird, untersucht worden. Am Eintritt in den Umlenkkanal ist dazu eine über den Querschnitt konstante Geschwindigkeit bei drei verschiedenen Reynoldszahlen vorgegeben worden. Bild 7.14a zeigt die Form der Geschwindigkeitsprofile im mittleren, geraden Teil (Stelle 2) und am Austritt der Umlenkung (Stelle 3), jeweils bezogen auf die kontinuitätsgemittelte Durchströmgeschwindigkeit $\bar{c}$. Mit zunehmender Reynoldszahl nimmt die Grenzschichtdicke deutlich ab. Das Verhalten des Rechenmodells entspricht daher tendenziell dem realen Strömungsverhalten. Obwohl die Grenzschicht im Vergleich zu den Messungen im allgemeinen zu dick berechnet wird, ist daher eine qualitative Übereinstimmung mit der Wirklichkeit gegeben.

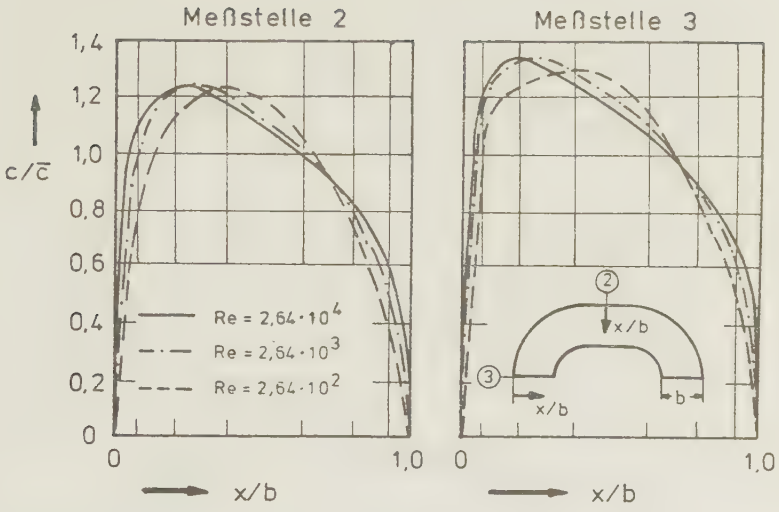



Bild 7.14a: Einfluß der Reynoldszahl auf die Grenzschichtdicke

## 7.2. Rechenergebnisse für weitere Fälle

Da das Rechenmodell sowohl qualitative als auch quantitative Übereinstimmung mit Meßergebnissen gezeigt hat, sollen nun die Rechenbeispiele 3 bis 7 vorgestellt werden, deren Ergebnisse nicht experimentell überprüft worden sind. Diese Beispiele betreffen die gleiche geometrische Anordnung wie die Fälle 1 und 2, nämlich den im Versuchsstand realisierten Umlenkkanal.

Bei den Beispielen 3 und 4 handelt es sich um rotationssymmetrische Strömungen, da das Zuströmprofil nicht über dem Umfang variiert. Über der Kanalbreite unterscheiden sich die Zuströmprofile jedoch bezüglich der Lage des Maximums, wobei der Volumenstrom in beiden Fällen gleich ist ($Re = 1{,}97 \cdot 10^5$). Bild 7.15 zeigt den Vergleich der

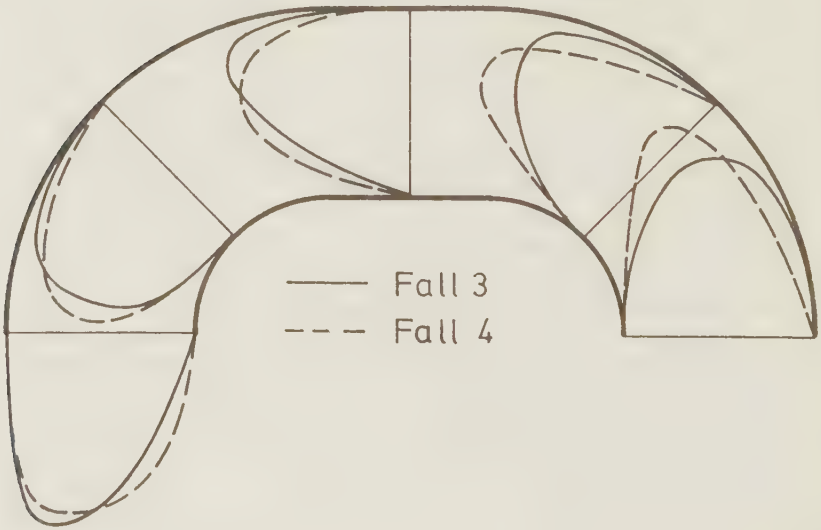



Bild 7.15: Vergleich der Rechenergebnisse der Fälle 3 und 4

Rechenergebnisse für die Beispiele 3 und 4 an fünf Stellen im Meridianschnitt des Kanals. Während der Umlenkung erfolgt in beiden Fällen eine Verlagerung des Geschwindigkeitsmaximums an die Außenkontur des Kanals, wie es auch in den Fällen 1 und 2 festgestellt wurde. Dabei gleichen sich beide Profile immer mehr an, so daß sich das Abströmprofil nicht mehr stark unterscheidet. Das Eintrittsprofil von Fall 4 erzeugt eine nur geringfügig gleichförmigere Abströmung.

Das Rechenbeispiel 5 stellt keinen rotationssymmetrischen Fall mehr dar, da das Zuströmprofil in Umfangsrichtung Nachlaufdellen aufweist. Die Form des Profils über der Kanalbreite entspricht Fall 3, die Größe des Geschwindigkeitsmaximums stimmt ebenfalls überein. Es sind lediglich periodisch in Umfangsrichtung simulierte Nachlaufdellen überlagert worden. Dadurch ergibt sich auch ein im Vergleich zu Fall 3 etwas geringerer Volumenstrom ($Re = 1{,}797\ 10^5$).

Die Ergebnisse der Rechnung zeigt Bild 7.16. An mehreren im Bild gekennzeichneten Ebenen des Umlenkkanals werden die räumlichen Geschwindigkeitsprofile durch Isotachenfelder dargestellt. Gleichzeitig sind die Profile in einem Schnitt in der Mitte der Schaufelteilung in den Meridianschnitt des Kanals eingezeichnet. In der ersten $90^\circ$- Umlenkung erfolgt bereits eine Verlagerung des Geschwindigkeitsmaximums an den Außenrand des Kanals, während die Nachlaufdellen zum Teil ausgeglichen werden. Im geraden Teil des Kanals liegt eine annähernd rotationssymmetrische Strömung vor; die noch vorhandenen Geschwindigkeitsunterschiede über der Schaufelteilung werden jedoch in der zweiten $90^\circ$-Krümmung wieder durch die Zentrifugalkräfte verstärkt.

Die jeweils normal zur Durchflußrichtung auftretenden Querströmungskomponenten sind durch Vektoren entsprechend

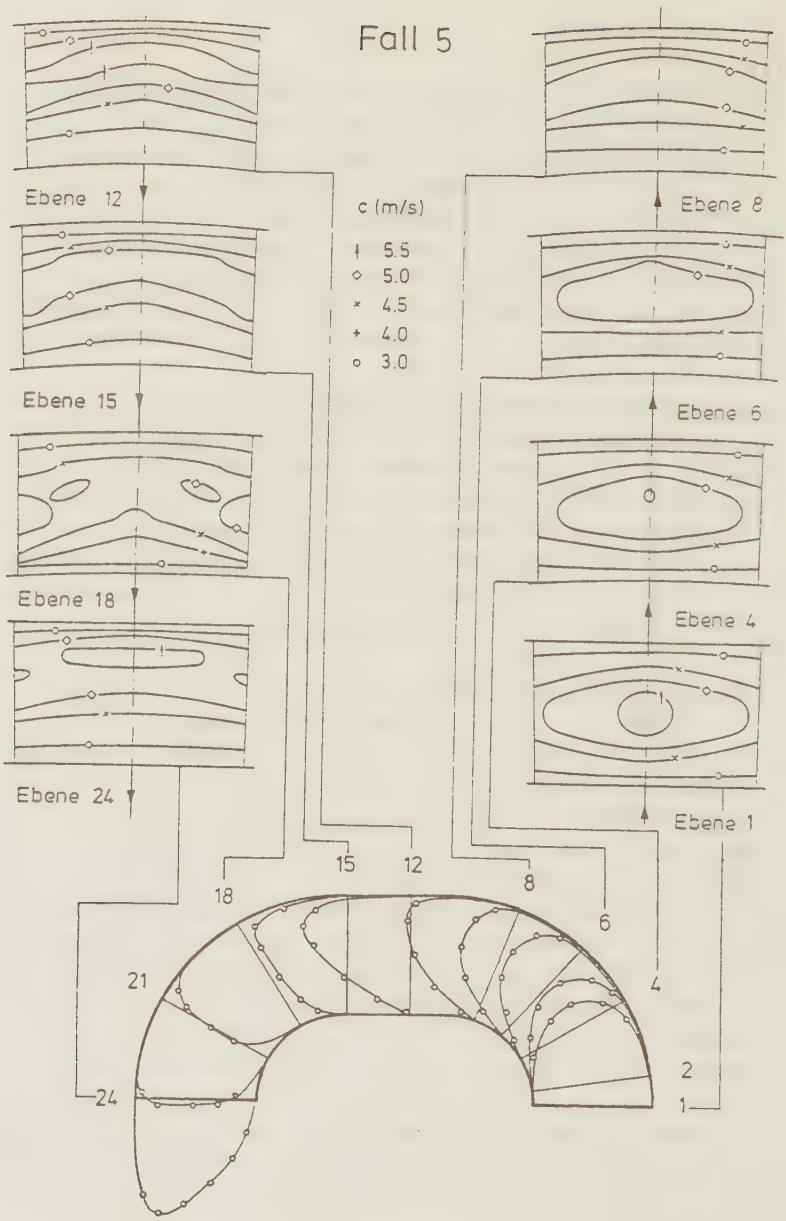



Bild 7.16: Berechnete Isotachenfelder für Fall 5

ihrer Größe und Richtung in Bild 7.17 dargestellt. Da auf die Masse im Bereich des Geschwindigkeitsmaximums in der Mitte die größte Zentrifugalkraft wirkt, findet dort ein Fluidtransport zum Außenrand des Kanals hin statt. An der Außenwand wird ein Teil des Fluids umgelenkt und strömt in den Bereichen niedrigerer Meridiangeschwindigkeit zum Innenrand zurück. Dies führt bereits in der ersten 90°- Umlenkung zur Ausbildung der beiden gegenläufigen, ebenfalls in Rohrkrümmern bekannten Sekundärwirbel. Erfolgt die Zuströmung zur Umlenkung rotationssymmetrisch wie in Beispiel 3, so bilden sich solche Sekundärströmungen nicht aus, sondern die Strömung bleibt rotationssymmetrisch. Die energiearmen Bereiche in den Nachlaufdellen sind offenbar Voraussetzung für die Ausbildung solcher Sekundärströmungen in Umlenkkanälen.

Nach der ersten 90°- Umlenkung, im geraden Teil des Kanals, zeigt das Bild der Querströmungen aufgrund der nachlassenden Fliehkräfte einen Fluidtransport zum Innenrand der Umlenkung. Damit wird das außen liegende Geschwindigkeitsmaximum in Richtung auf die Kanalmitte zurück verschoben.

In der zweiten 90°- Umlenkung setzt die nach außen gerichtete Wirkung der Zentrifugalkräfte und damit der Massentransport zum Außenrand wieder ein.

Die beiden letzten Fälle 6 und 7 sind gerechnet worden, um die Abhängigkeit der Strömungsverluste von der Form des Eintrittsprofils genauer zu untersuchen. Diese beiden Fälle werden daher im folgenden Abschnitt beim Vergleich der Verlustbeiwerte mit betrachtet.

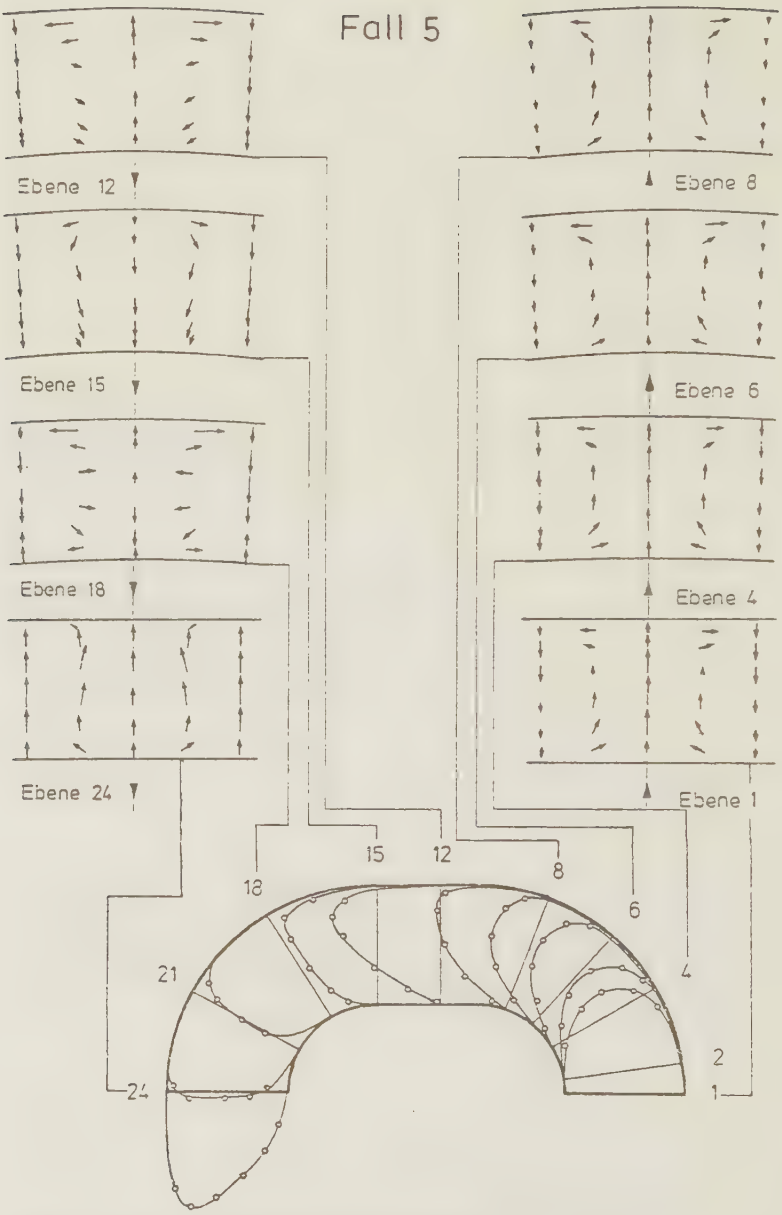



Bild 7.17: Berechnete Sekundärströmungen in Fall 5

## 7.3. Verlustbeiwerte

Entsprechend den bei Rohrströmungen bekannten Verlustbeiwerten, die den durch dissipative Vorgänge entstehenden Druckverlust auf den Staudruck der kontinuitätsgemittelten Strömungsgeschwindigkeit beziehen, kann ein Verlustbeiwert $\zeta$ für Umlenkkanäle nach der Beziehung

$$\zeta = \frac{\bar{p}_{t_E} - \bar{p}_{t_A}}{\frac{\rho}{2} \cdot \bar{c}_{m_E}^{\,2}} \qquad (38)$$

definiert werden. Darin ist $\bar{c}_{m_E}$ die kontinuitätsgemittelte Meridiangeschwindigkeit am Eintritt in den Kanal und wird nach der Beziehung

$$\bar{c}_{m_E} = \frac{1}{A_E} \cdot \int_{A_E} c_m \cdot dA_E = \frac{\dot{V}}{A_E}$$

bestimmt. Bei der Mittelung der Totaldrücke wird mit der örtlichen Meridiangeschwindigkeit gewichtet, um eine Bilanz der Energieströme zu erhalten. Die entsprechende Gleichung lautet:

$$\bar{p}_t = \frac{1}{A \cdot \bar{c}_m} \cdot \int_A p_t \cdot c_m \cdot dA = \frac{1}{\dot{V}} \cdot \int_A p_t \cdot c_m \cdot dA$$

Damit erhält man für den Verlustbeiwert insgesamt die Form

$$\zeta = \frac{\frac{1}{\dot{V}} \cdot \left[ \int_{A_E} p_{t_E} \cdot c_m \cdot dA_E - \int_{A_A} p_{t_A} \cdot c_m \cdot dA_A \right]}{\frac{\rho}{2} \cdot \left( \frac{\dot{V}}{A_E} \right)^2} \qquad (39)$$

Für alle betrachteten Beispiele ist der so definierte Ver-

lustbeiwert in Bild 7.18 angegeben. In den Fällen 1 und 2 sind sowohl die berechneten als auch die gemessenen Werte angegeben. Die Werte zeigen, daß bei drallbehafteter Durchströmung der Umlenkung (Fall 2) mit wesentlich höheren Verlusten gerechnet werden muß. Dies ist erklärlich, da in der Drallströmung bei gleichem Volumenstrom höhere resultierende Geschwindigkeiten und damit höhere Geschwindigkeitsgradienten auftreten, die zu dissipativen Verlusten führen. Zu diesen Schubspannungen infolge der Geschwindigkeitsunterschiede kommen zusätzliche Schubspannungen aufgrund der über der Kanalbreite recht unterschiedlichen Strömungsrichtung hinzu (siehe Bild 7.14).

In Fall 1 weist Beispiel b trotz eines mittleren Volumenstroms sowohl in der Messung als auch in der Rechnung die höchsten Verluste auf. Dies kann nur durch das in diesem Beispiel bei der Messung festgestellte insgesamt etwas inhomogenere Zuströmprofil erklärt werden. Das Eintrittsprofil unterscheidet sich zwar in allen drei Beispielen qualitativ kaum, in Fall b liegt aber insgesamt stärkere Ungleichförmigkeit vor. Nimmt man als Maß für die Ungleichförmigkeit eines Profils das Verhältnis $\alpha$ von energiegemittelter zu kontinuitätsgemittelter Geschwindigkeit

$$\alpha = \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{A} \cdot \int_A c_m^3 \cdot dA}}{\frac{1}{A} \cdot \int_A c_m \cdot dA} ,$$

das im Fall einer über den Querschnitt konstanten Geschwindigkeit den Wert Eins annimmt, so ergeben sich die Werte nach folgender Tabelle:

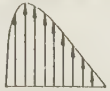
| Fall Nr. | Eintrittsprofil über Umfang | Eintrittsprofil über Breite | $\zeta_{ger.} = \frac{\bar{p}_{t_E} - \bar{p}_{t_A}}{\frac{\rho}{2} \bar{c}_{m_E}^2}$ | $\zeta_{gemessen}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | | a) 0,189<br>b) 0,309<br>c) 0,248 | a) 0,250<br>b) 0,338<br>c) 0,272 |
| 2 | | | a) 0,778<br>b) 1,105<br>c) 0,747 | a) 1,008<br>b) 1,201<br>c) 1,110 |
| 3 | | | 0,141 | - |
| 4 | | | 0,111 | - |
| 5 | | | 0,160 | - |
| 6 | |  | 0,123 | - |
| 7 | | | 0,219 | - |

Bild 7.18: Verlustbeiwerte der sieben Fälle aus Messung und Rechnung

| Fall | $\alpha_{Eintritt}$ | $\alpha_{Austritt}$ |
|---|---|---|
| 1a | 1,096 | 1,099 |
| 1b | 1,157 | 1,119 |
| 1c | 1,116 | 1,108 |

Zum Vergleich sei angegeben, daß für ein Geschwindigkeitsprofil parabolischer Form nach /5/ gilt:

$$\alpha = 1{,}14.$$

Im Fall b nimmt $\alpha$ sowohl am Eintritt als auch am Austritt den größten Wert an.Die Ungleichförmigkeit des Zuströmprofils bleibt also weitgehend erhalten und führt insgesamt zu höheren dissipativen Verlusten.

Insgesamt ist zu erkennen, daß die berechneten Verlustbeiwerte etwas niedriger liegen als die Werte aus Meßergebnissen, während die Tendenzen richtig wiedergegeben werden. Es ist zu erwarten, daß diese Übereinstimmung durch ein genauer angepaßtes Turbulenzmodell noch verbessert werden kann.

Der Vergleich der Verluste von Fall 3 (rotationssymmetrische Strömung) und Fall 5 (zusätzlich Nachlaufdellen) zeigt, daß die infolge der energiearmen Nachlaufzonen entstehenden Vermischungs- und Sekundärbewegungen zu höheren Verlusten führen.

Fall 3 und Fall 4 unterscheiden sich lediglich bezüglich der Form des Eintrittsprofils über der Kanalbreite. Während des größten Teils der Kanaldurchströmung liegt das Geschwindigkeitsmaximum im Fall 3 entsprechend Bild 7.15 an der

Außenseite der Krümmung, was an dieser Stelle zu hohen Geschwindigkeitsgradienten führt. Das Profil in Fall 4 ist überwiegend gleichförmiger. Insgesamt führt dies zu geringeren Verlusten in Fall 4.

Der Fall 7, dessen Eintrittsprofil sich von dem aus Fall 3 bzw. Fall 4 ebenfalls nur im Verlauf über der Kanalbreite unterscheidet, setzt diese Tendenz weiter fort. Da das Geschwindigkeitsmaximum bereits am Eintritt am Außenrand der Krümmung liegt, sind die Verluste noch höher als in Fall 3.

In Fall 6 ist auch das Eintrittsprofil von Fall 4 mit Nachlaufdellen versehen worden, um auch bei diesem Beispiel den Einfluß der Dellen auf die Verluste zu bestimmen. Durch die in Umfangsrichtung überlagerten Nachlaufdellen wird der eintretende Volumenstrom geringer und entspricht dem von Fall 5. Der berechnete Verlustbeiwert ist also höher als in Fall 4, da dissipative Vermischungen in den Nachlaufzonen auftreten.

Der Vergleich der einzelnen Fälle bezüglich der Verlustbeiwerte ist allerdings abhängig von der Art der Mittelwertbildung bei der Bestimmung von $\bar{p}_t$ und $\bar{c}_m$. Eine einfache arithmetische Mittelung kann z. B. die Tendenzen etwas verschieben. Es ist daher wichtig, bei der Angabe eines Verlust beiwertes die verwendeten Mittelwerte mit anzugeben.

Um eine Aussage über den Einfluß der Krümmungseffekte (Sekundärströmungen, ungleichförmige Geschwindigkeitsprofile) auf die Verluste machen zu können, soll die Durchströmung des Umlenkkanals nun mit einer geraden Ringspaltströmung,

für die gesicherte Meß- und Rechenergebnisse vorliegen, verglichen werden. Im mittleren geraden Teil des des betrachteten Umlenkkanals liegt eine solche Strömung vor. Stellt man sich die beiden 90°- Umlenkungen vor und hinter dem geraden Teil nach außen aufgebogen vor, so ergibt sich eine Form entsprechend Bild 7.19 mit den dort angegebenen Abmessungen. Die Strömung durch diesen Ringspalt entspricht der Strömung im Umlenkkanal bis auf Krümmungseffekte und bis auf den Einfluß der Querschnittsänderungen des wirklichen Kanals.

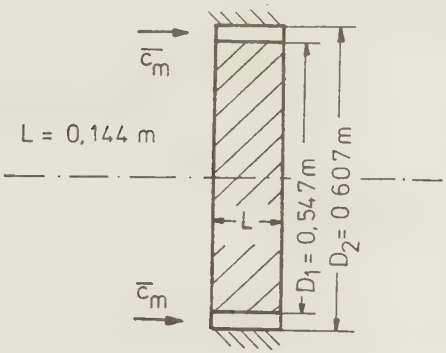



Bild 7.19: Form des zum Vergleich benutzten Ringspaltes

Für eine solche voll ausgebildete Ringspaltströmung gibt Schlichting /8/ Verlustbeiwerte aus verschiedenen Untersuchungen an. Dabei wird entsprechend der Rohrströmung eine Reibungszahl $\lambda$ definiert, durch die der statische Druckverlust nach der Gleichung

$$\frac{p_A - p_E}{\frac{\rho}{2} \cdot \bar{c}_m^2} = \frac{L}{D_h} \cdot \lambda$$

bestimmt werden kann. Darin ist L die Länge des Spaltes, $D_h$ der hydraulische Durchmesser, $\bar{c}_m$ die mittlere Strömungsgeschwindigkeit.

Im Falle voll ausgebildeter laminarer Strömung lassen sich die Navier-Stokes-Gleichungen für den Fall des Ringspaltes analog zur Hagen-Poiseuille-Strömung exakt lösen. Diese Lösung liefert den Wert für $\lambda$ zu

$$\lambda_{lam} = \frac{96}{Re} \qquad \left(\text{Kreisrohr: } \lambda_{lam} = \frac{64}{Re}\right)$$

mit

$$Re = \frac{\bar{c}_m \cdot D_h}{\nu} .$$

Bei turbulenter Strömung ergibt sich kein Unterschied zur einfachen Kreisrohrströmung, so daß hier das Gesetz von Blasius

$$\lambda_{tur} = \frac{0{,}316}{Re^{0{,}25}}$$

angewendet werden kann.

Für den durch Gleichung (39) definierten Verlustbeiwert $\zeta$ gilt im Fall der Ringspaltströmung

$$\zeta = \frac{\frac{1}{\dot{V}}\left[ \int_{A_E} p_{t_E} \cdot c_m \cdot dA_E - \int_{A_A} p_{t_A} \cdot c_m \cdot dA_A \right]}{\frac{\rho}{2} \cdot \left(\frac{\dot{V}}{A_E}\right)^2} = \frac{p_A - p_E}{\frac{\rho}{2} \cdot c_m^2} ,$$

weil die Differenz der Totaldrücke an Ein- und Austritt des Ringspaltes wegen des gleichbleibenden Geschwindigkeitspro-

fils genau der Differenz der statischen Drücke entspricht. Eine Mittelung der Drücke erübrigt sich ebenfalls, da der Druck über der Höhe des Ringspaltes bei voll ausgebildeter Strömung konstant ist. Es gilt daher weiter:

$$\zeta = \frac{L}{D_h} \cdot \lambda$$

Der hydraulische Durchmesser $D_h$ wird für den Ringspalt zu

$$D_h = \frac{4 \text{ x Querschnittsfläche}}{\text{benetzter Umfang}} = \frac{\pi (D_2^2 - D_1^2)}{\pi (D_2 + D_1)}$$

$$= \frac{(D_2 - D_1)(D_2 + D_1)}{D_2 + D_1} = D_2 - D_1$$

Daher folgt

$$\zeta = \frac{L}{D_2 - D_1} \cdot \lambda$$

Die Reibungszahl $\lambda$ ist von der Reynoldszahl abhängig. Diese Zahl wird hier zu

$$Re = \frac{\bar{c}_m \cdot D_h}{\nu} = \frac{\bar{c}_m \cdot (D_2 - D_1)}{\nu}$$

$$= \frac{\dot{V} \cdot (D_2 - D_1)}{\frac{\pi}{4} \cdot (D_2^2 - D_1^2)\, \nu} = \frac{4 \cdot \dot{V}}{\pi (D_2 + D_1) \nu}$$

Damit folgt bei laminarer Strömung

$$\zeta_{lam} = \frac{L}{D_2 - D_1} \cdot \frac{96}{Re} = \frac{L}{D_2 - D_1} \cdot \frac{24 \pi (D_2 + D_1) \nu}{\dot{V}} \qquad (40)$$

Bei turbulenter Durchströmung des Ringspaltes ergibt sich

$$\text{tur} \quad \frac{L}{D_2 - D_1} \frac{0{,}316}{Re^{0{,}25}} = 0{,}316 \frac{L}{D_2 - D_1} \left[ \frac{4 \cdot \dot{V}}{\pi (D_2 + D_1) \nu} \right]^{-0{,}25} \qquad (41)$$

Sowohl im Fall laminarer als auch im Fall turbulenter Strömung ist $\zeta$ entsprechend Gleichung (40) bzw. (41) nur noch vom durchgesetzten Volumenstrom abhängig, da alle anderen Größen durch die Geometrie bestimmt sind und damit für den hier betrachteten Kanal entsprechend Bild 7.19 festliegen.

Im Bereich der in den Fällen 1 bis 7 vorliegenden Volumenströme ist in Bild 7.20 der Verlauf von $\zeta$ sowohl für die laminare als auch für die turbulente Ringspaltströmung über dem Volumenstrom aufgetragen worden. Die $\zeta$-Werte der tur-

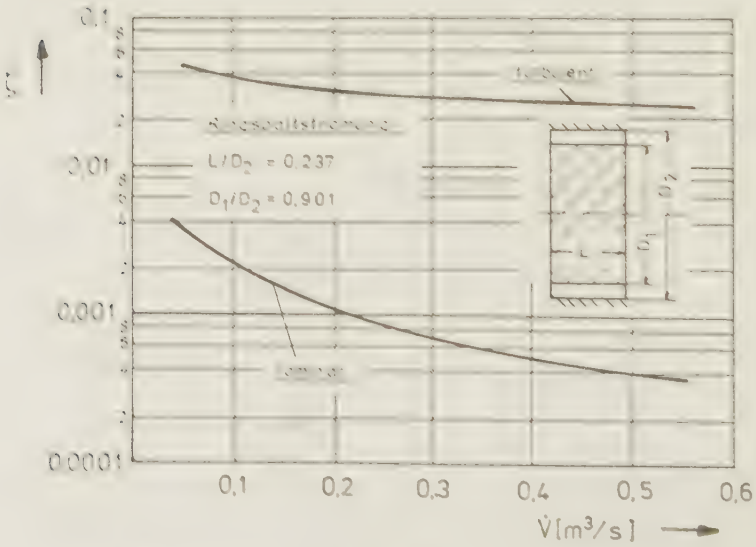



Bild 7.20: Verlustbeiwerte der voll ausgebildeten Ringspaltströmung nach Schlichting /8/

bulenten Strömung liegen um mehr als eine Größenordnung über den entsprechenden laminaren Werten und zeigen eine geringere Abhängigkeit vom Volumenstrom. Für den Vergleich mit dem wirklichen, gekrümmten Kanal müssen die Werte der turbulenten Strömung herangezogen werden. Außerdem kann der Vergleich nur bei drallfreier Durchströmung erfolgen, da die Ringspaltströmung ebenfalls drallfrei ist. Der Vergleich ergibt, daß die Verlustbeiwerte der Ringspaltströmung im Bereich einer Größenordnung kleiner sind als die im gekrümmten Kanal gemessenen und berechneten Werte. Der Einfluß der Krümmungen und auch der Einfluß der Form der Eintrittsprofile, der bei der Ringspaltströmung ebenfalls vernachlässigt wird, da eine ausgebildete Strömung angenommen wird, macht daher den überwiegenden Teil der Verluste aus.

Da der Einfluß der Krümmungen auf den Druckverlust bei einer Rohrströmung recht genau bekannt ist, kann diese Strömung zusätzlich zum Vergleich herangezogen werden. Bild 7.21 zeigt im oberen Teil ein gerades Kreisrohr, im unteren Teil

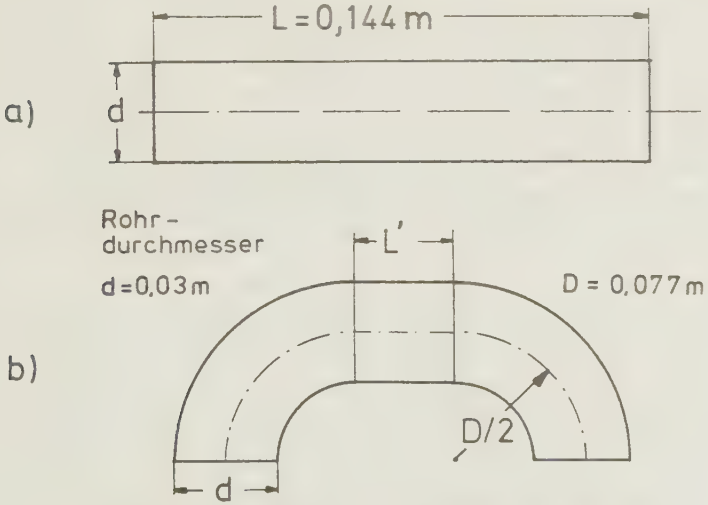



Bild 7.21: Vergleich von geradem und gekrümmtem Rohr

ein gekrümmtes Rohr gleicher Länge und gleichen Durchmessers. Die Abmessungen entsprechen dabei denen des betrachteten Umlenkkanals im Meridianschnitt.

Für das gerade Rohr läßt sich der Verlustbeiwert durch

$$\zeta_a = \lambda \cdot \frac{L}{d} \quad ,$$

für das gekrümmte Rohr durch

$$\zeta_b = \lambda \cdot \frac{L'}{d} + 2 \cdot \zeta_{Kr}$$

darstellen. Darin ist $\lambda$ die von der Reynoldszahl abhängige Widerstandszahl für gerade Rohre, $\zeta_{Kr}$ ist der Krümmerverlustbeiwert für einen 90°- Krümmer.

Setzt man beide Werte ins Verhältnis, so erhält man

$$\frac{\zeta_b}{\zeta_a} = \frac{\lambda \cdot \frac{L'}{d} + 2 \cdot \zeta_{Kr}}{\lambda \cdot \frac{L}{d}} = \frac{L'}{L} + 2 \cdot \frac{d}{L} \cdot \frac{\zeta_{Kr}}{\lambda}$$

Nach /68/ ist der Krümmerverlustbeiwert bei turbulenter Strömung von der Reynoldszahl und dem Verhältnis d/D, das die Stärke der Krümmung beschreibt, abhängig. Nach Messungen von Ito /69/ gilt für einen 90°- Krümmer

$$\zeta_{Kr} = \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{D}{d}} \cdot \frac{0{,}138 \cdot \left[ 0{,}95 + 17{,}2 \left(\frac{d}{D}\right) \right]^{1{,}96}}{\left[ Re \left(\frac{d}{D}\right)^2 \right]^{0{,}17}}$$

wenn

$$Re \left(\frac{d}{D}\right)^2 < 10^5 \quad .$$

Diese Grenze wird hier eingehalten, da $(d/D)^2 = 0{,}15$ und $Re = 10^5$ vorausgesetzt werden soll. Es folgt dann

$$\zeta_{Kr} = 0{,}25$$

Nach dem Widerstandsdiagramm für die gerade turbulente Rohrströmung /68,8/ folgt für $Re = 10^5$ eine Widerstandszahl von

$$\lambda = 0{,}17$$

Das Verhältnis der Verlustbeiwerte des geraden und des doppelt gekrümmten Rohres gleicher Länge ergibt sich bei $Re = 10^5$ damit zu

$$\frac{\zeta_b}{\zeta_a} = 6{,}29$$

Bei der Strömung durch ein gekrümmtes Rohr bestätigt sich also wie im Umlenkkanal die Tatsache, daß der größte Teil der Verluste auf die Krümmungseffekte zurückzuführen ist. Außerdem zeigt sich, daß das Verhältnis der Verlustbeiwerte für gerade und gekrümmte Kanäle in gleicher Größenordnung liegt.

## 8. Zusammenfassung

Bei der Auslegung radialer Strömungsmaschinen bzw. hydrodynamischer Wandler ist die genaue Kenntnis der Strömungsvorgänge in den Rückführ- bzw. Umlenkkanälen erforderlich. Einerseits müssen die dissipativen Verluste dieser Komponenten bei der Bildung des gesamten Maschinenwirkungsgrades berücksichtigt werden,und andererseits ist die Kenntnis der Form des Zuströmprofils zum nachfolgenden Bauteil zu dessen Gestaltung notwendig.

Es wird daher ein Rechenmodell entwickelt und vorgestellt, welches es ermöglicht, eine Strömungsrechnung für diese Kanäle durchzuführen. Um die aufgrund der Krümmung der Kanäle auftretenden Sekundärströmungen zu erfassen, wird dieses Rechenverfahren für den dreidimensionalen Fall abgeleitet und programmiert. Die zur Bestimmung der Verluste ebenfalls wichtige Beeinflussung der Strömung durch Reibung und Turbulenz werden dabei berücksichtigt. Die Turbulenz wird mit Hilfe der Prandtl'schen Mischungsweghypothese unter Zuhilfenahme weiterer empirischer Beziehungen modelliert.

Besonderer Wert wurde auf geringen Rechenzeitbedarf des Modells gelegt, da voll dreidimensionale Strömungsrechnungsverfahren die Kapazität der meisten Rechenanlagen noch immer überfordern. Der wesentliche Schritt zur Reduzierung der benötigten Rechenkapazität ist die Beschränkung auf Strömungen mit einer an jeder Stelle des Kanals positiven Geschwindigkeitskomponente in Durchflußrichtung. Da die Durchströmung der Umlenkkanäle möglichst ohne Rückströmen und Ablösung erfolgen soll, ist diese Einschränkung nicht gravierend. Sie ermöglicht aber ein in Durchflußrichtung fortschreitendes, schrittweises Lösen der Bewegungsgleichungen wobei allerdings der gesamte Kanal iterativ mehrfach durchlaufen werden muß. Dieses Vorgehen verringert die Anforderun-

gen an den zur Verfügung stehenden Rechner sowohl bezüglich der Speicherkapazität als auch bezüglich der Rechengeschwindigkeit. So liegt die Rechenzeit für den in Abschnitt 7. betrachteten Kanal mit dem dort beschriebenen Gitter bei etwa 30 s auf einer CYBER 175. In dieser Zeit wird die schrittweise Berechnung des Kanals iterativ etwa 35 mal durchgeführt, was zum Erreichen der vorgegebenen Genauigkeit ($\varepsilon < 0{,}01$ nach Abschnitt 4.1.3.) führt.

Als erster Test des Rechenmodells wird ein Vergleich mit verschiedenen exakten Lösungen der Navier-Stokes-Gleichungen durchgeführt, der in zwei Fällen vollständige Übereinstimmung ergibt und in einem dritten Fall neben ebenfalls sehr guter Übereinstimmung den Einfluß unterschiedlicher Rechenschrittweite auf die Genauigkeit der Ergebnisse zeigt.

In einem neu entwickelten Versuchsstand sind zum Vergleich mit Rechenergebnissen experimentelle Untersuchungen an einem Umlenkkanal durchgeführt worden. Die Strömungsgeschwindigkeit ist dabei mit dem Laser-2-Focus-Verfahren gemessen worden. Der Vergleich mit diesen Messungen ergibt gute qualitative und quantitative Übereinstimmung. Die gemessenen Geschwindigkeitsprofile zeigen jedoch i.a. dünnere Grenzschichten als die berechneten, was auf das einfache Turbulenzmodell zurückgeführt wird.

Es werden außerdem Verlustbeiwerte des Umlenkkanals sowohl aus Meß- als auch aus Rechenergebnissen bestimmt. Bei ebenfalls guter Übereinstimmung von Rechnung und Messung zeigt sich, daß der Strömungswiderstand des Umlenkkanals außer vom Volumenstrom sehr stark von der Größe der vorhandenen Drallkomponenten und von der Form der Geschwindigkeitsprofile am Eintritt in die Umlenkung abhängt.

Damit ist gezeigt, daß ein Umlenkkanal gegebener Form keinesfalls durch einen festen Verlustbeiwert charakterisiert ist, sondern daß sich dieser Wert je nach Zuströmung erheblich ändern kann. Für Rückführkanäle in Radialmaschinen kann daraus der Schluß gezogen werden, daß der Anteil der Umlenkung an den Gesamtverlusten je nach Betriebspunkt der Maschine unterschiedlich sein kann.

Das Rechenmodell ist in der Lage, die Form des Abströmprofils sowie die auftretenden Verluste in Abhängigkeit vom Zuströmprofil vorauszusagen und kann damit als Grundlage zur Auslegung von Umlenkkanälen verwendet werden.

## Anhang A1: Transformation der Navier-Stokes-Bewegungsgleichungen in $(r,\psi,\varphi)$ - Toruskoordinaten

Die Transformationsgleichungen zwischen kartesischen Koordinaten $(x,y,z)$ und Toruskoordinaten $(r,\psi,\varphi)$ nach Bild 4.3 lauten:

$$x = (r\cdot\sin\psi + R)\cdot\cos\varphi$$

$$y = (r\cdot\sin\psi + R)\cdot\sin\varphi$$

$$z = -\, r\cdot\cos\psi$$

Die vom Koordinatensystem unabhängige Darstellung der Navier-Stokes-Bewegungsgleichungen hat die Form:

$$\text{grad}\left(\frac{\vec{w}^2}{2}\right) - \vec{w} \times \text{rot}\,\vec{w} = -\frac{\text{grad}\,p}{\rho} + \nu\cdot\Delta\vec{w}$$

Die Kontinuitätsgleichung lautet dann:

$$\text{div}\,\vec{w} = 0$$

Darin ist $\vec{w}$ der dreidimensionale Geschwindigkeitsvektor.

Für die Operatoren grad und rot und den Laplace-Operator $\Delta$ ergibt sich nach /10/ in Toruskoordinaten, wenn die Größe $\Phi$ einen beliebigen Skalar und $\vec{F} = (F_r, F_\psi, F_\varphi)$ ein beliebiges Vektorfeld bedeuten:

$$\text{grad}\,\Phi = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}, \frac{\partial\Phi}{r\cdot\partial\psi}, \frac{1}{R + r\cdot\sin\psi}\,\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right)$$

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{bmatrix} \left[\frac{\partial\{F_\varphi \cdot (R + r\cdot\sin\phi)\}}{\partial\phi} - \frac{\partial(r\cdot F_\psi)}{\partial\varphi}\right]\cdot\frac{1}{r\cdot(R + r\cdot\sin\phi)} \\ \left[\frac{\partial F_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial\{F_\varphi\cdot(R + r\cdot\sin\phi)\}}{\partial r}\right]\cdot\frac{1}{R + r\cdot\sin\psi} \\ \left[\frac{\partial\{r\cdot F_\phi\}}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial\phi}\right]\cdot\frac{1}{r} \end{bmatrix}$$

$$\Delta\vec{F} = \frac{\partial^2\vec{F}}{\partial r^2} + \frac{\partial^2\vec{F}}{r^2\partial\phi^2} + \frac{1}{(R + r\cdot\sin\phi)^2}\cdot\frac{\partial^2\vec{F}}{\partial\varphi^2} + \frac{R + 2r\cdot\sin\phi}{r(R + r\cdot\sin\phi)}\cdot\frac{\partial\vec{F}}{\partial r} +$$

$$+ \frac{\cos\phi}{r(R + r\cdot\sin\psi)}\cdot\frac{\partial\vec{F}}{\partial\psi}$$

Der Operator div wird in Toruskoordinaten zu:

$$\text{div } \vec{w} = \frac{\partial w_r}{\partial r} + \frac{\partial w_\psi}{r\cdot\partial\phi} + \frac{1}{R + r\cdot\sin\phi}\frac{\partial w_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{w_r(R + 2r\cdot\sin\phi)}{r(R + r\cdot\sin\phi)} +$$

$$+ \frac{w_\phi\cdot\cos\phi}{R + r\cdot\sin\psi}$$

Damit ergeben sich die Impulsgleichungen und die Kontinuitätsgleichung in Komponentenschreibweise zu:

r-Richtung:

$$w_r\frac{\partial w_r}{\partial r} + \frac{w_\psi}{r}\cdot\frac{\partial w_r}{\partial \psi} + \frac{w_\varphi}{R + r\cdot\sin\psi}\cdot\frac{\partial w_r}{\partial \varphi} - \frac{w_\psi^2}{r} - \frac{w_\varphi^2\cdot\sin\psi}{R + r\cdot\sin\psi} =$$

$$= -\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\cdot\left[\frac{\partial^2 w_r}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 w_r}{r^2\cdot\partial\psi^2} + \frac{1}{(R + r\cdot\sin\psi)^2}\cdot\frac{\partial^2 w_r}{\partial\varphi^2} + \right.$$

$$+ \frac{R + 2r\cdot\sin\psi}{r(R + r\cdot\sin\psi)}\cdot\frac{\partial w_r}{\partial r} + \frac{\cos\psi}{r(R + r\cdot\sin\psi)}\cdot\frac{\partial w_r}{\partial\psi} - \frac{w_r}{r^2} -$$

$$- \frac{w_r\cdot\sin^2\psi}{(R + r\cdot\sin\psi)^2} - \frac{w_\psi\cdot\cos\psi}{r(R + r\cdot\sin\psi)} - \frac{2}{r^2}\cdot\frac{\partial w_\psi}{\partial\psi} -$$

$$\left. - \frac{w_\psi\cdot\sin\psi\cdot\cos\psi}{(R + r\cdot\sin\psi)^2} - \frac{2\cdot\sin\psi}{(R + r\cdot\sin\psi)^2}\cdot\frac{\partial w_\varphi}{\partial\varphi}\right]$$

φ-Richtung:

$$w_r\frac{\partial w_\varphi}{\partial r} + \frac{w_\psi}{r}\cdot\frac{\partial w_\varphi}{\partial\psi} + \frac{w_\varphi}{R + r\cdot\sin\psi}\cdot\frac{\partial w_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{w_r\cdot w_\varphi\cdot\sin\psi}{R + r\cdot\sin\psi} +$$

$$+ \frac{w_\varphi\cdot w_\psi\cdot\cos\psi}{R + r\cdot\sin\psi} = -\frac{1}{\rho(R + r\cdot\sin\psi)}\cdot\frac{\partial p}{\partial\varphi} + \nu\cdot\left[\frac{\partial^2 w_\varphi}{\partial r^2} + \right.$$

$$+ \frac{\partial^2 w_\varphi}{r^2\cdot\partial\psi^2} + \frac{1}{(R + r\cdot\sin\psi)^2}\cdot\frac{\partial^2 w_\varphi}{\partial\varphi^2} + \frac{R + 2r\cdot\sin\psi}{r(R + r\cdot\sin\psi)}\cdot\frac{\partial w_\varphi}{\partial r} +$$

$$+ \frac{\cos\psi}{r(R + r\cdot\sin\psi)} \cdot \frac{\partial w_\varphi}{\partial\psi} - \frac{w_\varphi}{(R + r\cdot\sin\psi)^2} +$$

$$+ \frac{2\cdot\sin\psi}{(R + r\cdot\sin\psi)^2} \cdot \frac{\partial w_r}{\partial\varphi} + \frac{2\cdot\cos\psi}{(R + r\cdot\sin\psi)^2} \cdot \frac{\partial w_\psi}{\partial\varphi} \Bigg]$$

ψ-Richtung:

$$w_r \frac{\partial w_\psi}{\partial r} + \frac{w_\psi}{r} \cdot \frac{\partial w_\psi}{\partial\psi} + \frac{w_\varphi}{R + r\cdot\sin\psi} \cdot \frac{\partial w_\psi}{\partial\varphi} - \frac{w_\varphi^2 \cdot \cos\psi}{R + r\cdot\sin\psi} + \frac{w_r \cdot w_\psi}{r} =$$

$$= - \frac{1}{\rho\cdot r} \cdot \frac{\partial p}{\partial\psi} + \nu \cdot \Bigg[ \frac{\partial^2 w_\psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 w_\psi}{r^2\ \partial\psi^2} + \frac{1}{(R + r\cdot\sin\psi)^2} \cdot \frac{\partial^2 w_\psi}{\partial\varphi^2} +$$

$$+ \frac{R + 2r\cdot\sin\psi}{r(R + r\cdot\sin\psi)} \cdot \frac{\partial w_\psi}{\partial r} + \frac{\cos\psi}{r(R + r\cdot\sin\psi)} \cdot \frac{\partial w_\psi}{\partial\psi} -$$

$$- \frac{w_\psi \cdot \cos^2\psi}{(R + r\cdot\sin\psi)^2} - \frac{w_\psi}{r^2} + \frac{w_r \cdot \cos\psi}{r(R + r\cdot\sin\psi)} + \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial w_r}{\partial\downarrow} -$$

$$- \frac{w_r \cdot \sin\psi \cdot \cos\psi}{(R + r\cdot\sin\psi)^2} - \frac{2\cdot\cos\psi}{(R + r\cdot\sin\psi)^2} \cdot \frac{\partial w_\varphi}{\partial\varphi} \Bigg]$$

Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial w_r}{\partial r} + \frac{\partial w_\psi}{r\partial\psi} + \frac{1}{R + r\cdot\sin\psi}\cdot\frac{\partial w_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{w_r(R + 2r\cdot\sin\psi)}{r(R + r\cdot\sin\psi)} +$$

$$+ \frac{w_\psi\cdot\cos\psi}{R + r\cdot\sin\psi} = 0$$

Verwendet man den Operator div entsprechend wie in den Gleichungen (4), so erhält man folgende Form:

r-Richtung:

$$\operatorname{div}\left(w_r^2,\ w_r\cdot w_\psi,\ w_r\cdot w_\varphi\right) - \frac{w_\psi^2}{r} - \frac{w_\varphi^2\cdot\sin\psi}{R + r\cdot\sin\psi} =$$

$$= -\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\cdot\left[\operatorname{div}\left[\frac{\partial w_r}{\partial r},\ \frac{\partial w_r}{r\cdot\partial\psi},\ \frac{1}{R + r\cdot\sin\psi}\cdot\frac{\partial w_r}{\partial\varphi}\right] -\right.$$

$$- \frac{w_r}{r^2} - \frac{w_r\cdot\sin^2\psi}{(R + r\cdot\sin\psi)^2} - \frac{w_\psi\cdot\cos\psi}{r(R + r\cdot\sin\psi)} - \frac{2}{r^2}\cdot\frac{\partial w_\psi}{\partial\psi} -$$

$$\left. - \frac{w_\psi\cdot\cos\psi\cdot\sin\psi}{(R + r\cdot\sin\psi)^2} - \frac{2\cdot\sin\psi}{(R + r\cdot\sin\psi)^2}\cdot\frac{\partial w_\varphi}{\partial\varphi}\right]$$

ψ-Richtung:

$$\operatorname{div}\,(w_r \cdot w_\psi,\ w_\psi^2,\ w_\psi \cdot w_\varphi) + \frac{w_r \cdot w_\psi}{r} - \frac{w_\varphi^2 \cdot \cos\psi}{R + r \cdot \sin\psi} = -\frac{1}{\rho \cdot r} \cdot \frac{\partial p}{\partial \psi} +$$

$$+ \nu \cdot \left[ \operatorname{div} \left[ \frac{\partial w_\psi}{\partial r},\ \frac{\partial w_\psi}{r \cdot \partial \psi},\ \frac{1}{R + r \cdot \sin\psi} \cdot \frac{\partial w_\psi}{\partial \varphi} \right] - \frac{w_\psi}{r^2} - \right.$$

$$- \frac{w_\psi \cdot \cos^2\psi}{(R + r \cdot \sin\psi)^2} + \frac{w_r \cdot \cos\psi}{r(R + r \cdot \sin\psi)} + \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial w_r}{\partial \psi} - \frac{w_r \cdot \sin\psi \cdot \cos\psi}{(R + r \cdot \sin\psi)^2} -$$

$$\left. - \frac{2 \cdot \cos\psi}{(R + r \cdot \sin\psi)^2} \cdot \frac{\partial w_\varphi}{\partial \varphi} \right]$$

φ-Richtung:

$$\operatorname{div}\,(w_r \cdot w_\varphi,\ w_\psi \cdot w_\varphi, w_\varphi^2) + \frac{w_\varphi}{R + r \cdot \sin\psi} \cdot (w_r \cdot \sin\psi + w_\psi \cdot \cos\psi) =$$

$$= -\frac{1}{\rho(R + r \cdot \sin\psi)} \cdot \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \nu \cdot \left[ \operatorname{div} \left[ \frac{\partial w_\varphi}{\partial r},\ \frac{\partial w_\varphi}{r \cdot \partial \psi},\ \frac{1}{R + r \cdot \sin\psi} \cdot \frac{\partial w_\varphi}{\partial \varphi} \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{w_\varphi}{(R + r \cdot \sin\psi)^2} + \frac{2 \cdot \sin\psi}{(R + r \cdot \sin\psi)^2} \cdot \frac{\partial w_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cdot \cos\psi}{(R + r \cdot \sin\psi)^2} \cdot \frac{\partial w_\psi}{\partial \varphi} \right]$$

## Anhang A2: Form der numerischen Gleichungen bei Annahme eines linearen Verlaufs der Funktionen zwischen den Stützstellen

Wird an Stelle des in Abschnitt 3.3.3. angenommenen Exponentialverlaufes ein linearer Verlauf der Funktionen zwischen den einzelnen Stützstellen vorgegeben, so ergeben sich in der Gleichung (16) folgende veränderte Koeffizienten:

$$K_1 = \frac{\Delta x \cdot \Delta z}{\Delta y} \cdot \nu \cdot (1 + \frac{Re^{I}_{Git}}{2})$$

$$K_2 = \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{\Delta z} \cdot \nu \cdot (1 + \frac{Re^{II}_{Git}}{2})$$

$$K_3 = \frac{\Delta x \cdot \Delta z}{\Delta y} \cdot \nu \cdot (1 - \frac{Re^{III}_{Git}}{2})$$

$$K_4 = \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{\Delta z} \cdot \nu \cdot (1 - \frac{Re^{IV}_{Git}}{2})$$

$$K_5 = \frac{\Delta y \cdot \Delta z}{\Delta x} \cdot \nu \cdot Re^{V}_{Git} \cdot v_{i,j-1,k-1}$$

$$K_p = - \frac{\Delta x \cdot \Delta z}{\rho}$$

$$K_6 = \Delta y \cdot \Delta z \, \frac{u_{i,j,k-1} + u_{i,j-1,k-1}}{2} + K_1 + K_2 + K_3 + K_4$$

Die Gleichung (16)

$$K_1 \cdot v_{i,j-1,k} + K_2 \cdot v_{i-1,j,k} + K_3 \cdot v_{i,j+1,k} + K_4 \cdot v_{i+1,j,k} +$$

$$+ K_p \cdot (p_{i,j,k} - p_{i,j-1,k}) + K_5 = K_6 \cdot v_{i,j,k}$$

setzt die Größe $v_{i,j,k}$ mit den v-Werten an den Nachbarpunkten in Beziehung. Es ist zu erkennen, daß die Koeffizienten $K_1$ bis $K_4$ Gewichtsfaktoren darstellen, die den Einfluß eines benachbarten v-Wertes auf $v_{i,j,k}$ bewerten. Eine Betrachtung der einzelnen Faktoren $K_1$ bis $K_4$ ergibt, daß sie jeweils aus einem „Viskositätsterm", der die Größe $\nu$ enthält, und einem „Konvektionsterm", der die Komponenten v und w enthält, bestehen. Dies sei am Beispiel des Faktors $K_2$ demonstriert:

$$K_2 = \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{\Delta z} \cdot \nu \cdot \left(1 + \frac{Re^{II}_{Git}}{2}\right) = \nu \cdot \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{\Delta z} + \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{\Delta z} \cdot \bar{w}$$

Viskositätsterm — Konvektionsterm

Der Konvektionsterm enthält den Ausdruck

$$\bar{w} = \frac{w_{i,j,k-1} + w_{i,j-1,k-1}}{2} \quad ,$$

der als mittlere Normalgeschwindigkeit auf der linken Begrenzung (Fläche II) des Kontrollraumes für die Geschwindigkeit $v_{i,j,k}$ aufgefaßt werden kann. Der Kontrollraum mit den zugehörigen Geschwindigkeitskomponenten ist in Bild A2.1 dargestellt.

Der Viskositätsterm in der Gleichung für $K_2$ ist immer größer als Null, während das Vorzeichen des Konvektionsterms vom Vorzeichen der Geschwindigkeit $\bar{w}$ abhängt. Er ist positiv bei $\bar{w} > 0$, wenn also eine Strömung von $v_{i-1,j,k}$ auf $v_{i,j,k}$ hin erfolgt, negativ bei umgekehrter Strömungsrichtung. Im Fall $\bar{w} > 0$ gilt $K_2 > 0$ und damit ist der Einfluß von $v_{i-1,j,k}$ auf $v_{i,j,k}$ entsprechend Gleichung (16) gleichsinnig, d.h. eine Vergrößerung von $v_{i-1,j,k}$ bewirkt eine Vergrößerung von $v_{i,j,k}$ und eine Verringerung von $v_{i-1,j,k}$ hat einen klei-

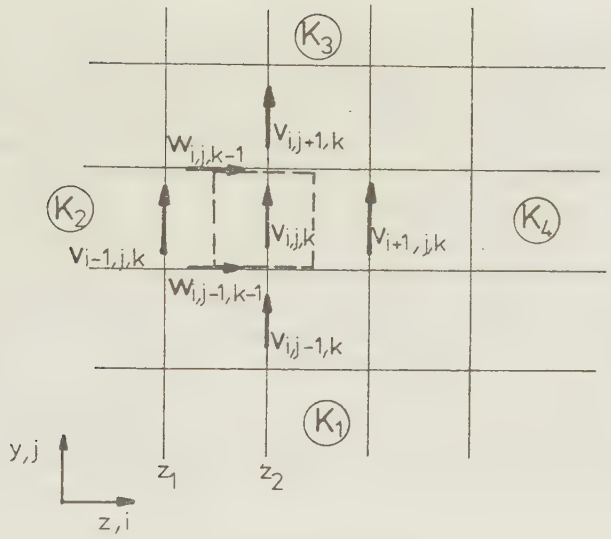



Bild A2.1: Kontrollraum der v-Gleichung

neren Wert von $v_{i,j,k}$ zur Folge. Ist $\bar{w}$ sehr groß, so wird auch $K_2$ groß; in der Bilanz (16) für den Wert $v_{i,j,k}$ erhält somit die Komponente $v_{i-1,j,k}$ großes Gewicht. Dies entspricht der anschaulichen Bedeutung der Konvektion: je größer die Querströmung von $v_{i-1,j,k}$ in Richtung auf $v_{i,j,k}$ ist, umso stärker gewinnt das Fluidelement mit der Geschwindigkeit $v_{i-1,j,k}$ an Einfluß auf die Geschwindigkeit $v_{i,j,k}$.

Ist $\bar{w} = 0$, so ist die Wechselwirkung zwischen $v_{i,j,k}$ und $v_{i-1,j,k}$ nur durch den Viskositätsterm gegeben.

Betrachtet man den Fall umgekehrter Strömungsrichtung $\bar{w} < 0$, so wird der Koeffizient $K_2$ negativ, wenn

$$|\bar{w}| > 2\,\frac{\nu}{\Delta z} \quad .$$

Das Fluid strömt dann von $v_{i,j,k}$ in Richtung auf $v_{i-1,j,k}$. Ist aber $K_2 < 0$, so ergibt sich nach Gleichung (16) eine gegensinnige Abhängigkeit von $v_{i-1,j,k}$ und $v_{i,j,k}$. Eine Vergrößerung von $v_{i-1,j,k}$ bewirkt eine Verringerung von $v_{i,j,k}$. Dieser Effekt ist physikalisch nicht zu deuten. Bei starker Bewegung des Fluids von $v_{i,j,k}$ in Richtung auf $v_{i-1,j,k}$, also aus dem Kontrollraum in Bild A2.1 heraus, sollte der Einfluß infolge Konvektion von $v_{i-1,j,k}$ auf $v_{i,j,k}$ nur verschwindend gering, aber nicht gegensinnig werden. Nach diesen Überlegungen müßte der Koeffizient $K_2$ auf den Bereich $K_2 \geq 0$ beschränkt sein.

In der Tat zeigt sich ein schwingendes und damit instabiles Verhalten der Lösung, wenn die Querströmungen so groß sind, daß einige K-Koeffizienten in den Bereich negativer Werte gelangen.

Entsprechende Betrachtung können natürlich auch für alle anderen Koeffizienten der Bewegungsgleichung für die v-Komponente und die Koeffizienten der beiden anderen Gleichungen angestellt werden.

Um Informationen über eine sinnvolle Festlegung der Koeffizienten zu gewinnen, können diese Überlegungen beispielhaft für den Koeffizienten $K_2$ durch weitere Betrachtungen ergänzt werden. Es sollen dazu die Terme der Impulsgleichung für die v-Komponente betrachtet werden, die in Richtung der w-Komponente, also in z-Richtung, miteinander in Wechselwirkung stehen. Nimmt man an, daß diese Terme die Impulsgleichung für die v-Komponente dominieren, so ergibt sich die Beziehung zwischen den Konvektions- und Viskositätsgliedern als:

$$w \cdot \frac{\partial v}{\partial z} = \nu \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \qquad \text{(A2.1)}$$

Darin ist w als bekannter Parameter zu betrachten, der infolge der vorgenommenen Linearisierung von der stromaufwärts benachbarten Querströmungsebene übernommen wird. Die Beziehung (A2.1) ist dann nur noch eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung 2. Ordnung, deren Lösung analytisch mit

$$v(z) = c_1 \cdot e^{\frac{w}{\nu} \cdot z} + c_2 \qquad \text{(A2.2)}$$

angegeben werden kann.

Will man den Verlauf von v in z-Richtung zwischen den Werten $v_{i-1,j,k}$ und $v_{i,j,k}$ bestimmen, so sind die Randbedingungen

$$v(z_1) = v_{i-1,j,k}$$

$$v(z_2) = v_{i,j,k}$$

in Gleichung (A2.2) einzuführen. Es ergibt sich die spezielle Lösung der Differentialgleichung

$$v(z) = \frac{e^{\frac{w}{\nu}(z - z_1)} - e^{\frac{w}{\nu}(z_2 - z_1)}}{1 - e^{\frac{w}{\nu}(z_2 - z_1)}} \cdot v_{i-1,j,k} +$$

$$+ \frac{1 - e^{\frac{w}{\nu}(z - z_1)}}{1 - e^{\frac{w}{\nu}(z_2 - z_1)}} \cdot v_{i,j,k}$$

Nach Einführen der mit der Gitterweite $\Delta z$ gebildeten Reynoldszahl

$$Re_{Git} = \frac{w \cdot \Delta z}{\nu}$$

und Definition von

$$\Delta z = z_2 - z_1$$

erhält man

$$v(z) = c \cdot v_{i-1,j,k} + (1 - c) \cdot v_{i,j,k} \qquad \text{(A2.3)}$$

mit

$$c = \frac{e^{Re_{Git}\frac{z - z_1}{\Delta z}} - e^{Re_{Git}}}{1 - e^{Re_{Git}}}$$

In Bild A2.2 ist der Verlauf dieser Lösung in Abhängigkeit von dem Parameter $Re_{Git}$ dargestellt. Es ist zu er-

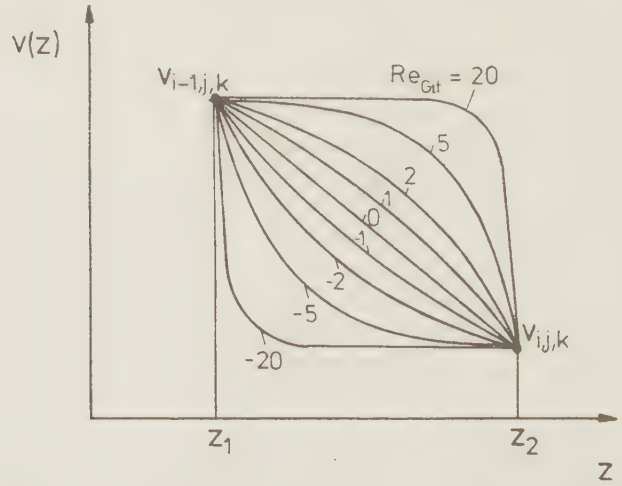



Bild A2.2: Exakte Lösung der Differentialgleichung (A2.1)

kennen, daß der Verlauf von v zwischen $v_{i-1,j,k}$ und $v_{i,j,k}$ bei größeren Werten von $Re_{Git}$ , also bei hoher Querströmungskomponente w, stark von der Linearität abweicht.

Eine numerische Lösung der einfachen Differentialgleichung (A2.1), deren exakte Lösung ja bekannt ist, zeigt ebenfalls instabiles Verhalten, wenn der Funktionsverlauf zwischen den Stützstellen als linear angenommen wird und die Koeffizienten der entstehenden numerischen Gleichungen negativ werden. Bild A2.3 zeigt die numerische Lösung von der Gleichung (A2.1), die mit drei Stützstellen zwischen $z_1$ und $z_2$ für verschiedene $Re_{Git}$- Zahlen bestimmt wurde. Für alle Werte $Re_{Git} > 8$ ergibt sich eine immer stärker instabile Lösung;

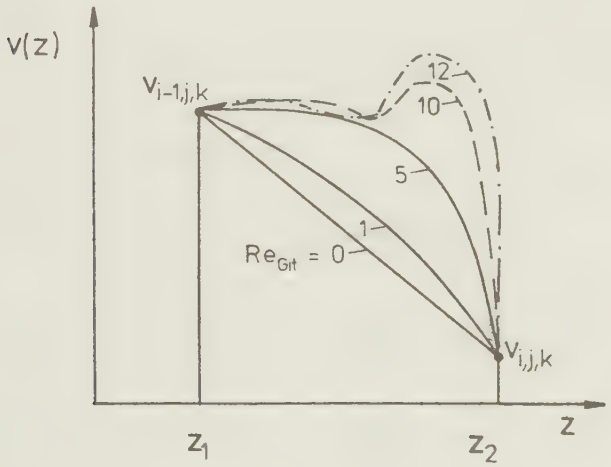



Bild A2.3: Numerische Lösung der Differentialgleichung (A2.1)

genau von dieser Grenze ab sind auch die Gleichungskoeffi-

zienten in diesem Fall negativ.

Es kann daher gesagt werden daß die Annahme eines linearen Verlaufs der betrachteten Funktionen bei großen Querströmungen offenbar nicht mehr dem Charakter der Lösung entspricht. Aus diesem Grund wird für das Rechenverfahren angenommen, daß die Exponentialfunktion, die die exakte Lösung der vereinfachten Gleichung (A2.1) darstellt, in der Lage ist, den wirklichen Verlauf besser zu approximieren. Dies führt dann auch zu Koeffizienten $K_1$ bis $K_4$, die, wie nach der Anschauung gefordert, nicht kleiner als Null werden können.

## Anhang A3: Vollständige Darstellung der Differenzengleichungen des numerischen Verfahrens

Es sollen die diskretisierten Gleichungen für die drei Geschwindigkeitskomponenten u, v und w und die aus der Kontinuitätsgleichung abgeleitete Druckkorrekturgleichung vollständig dargestellt werden. Die Gitterabstände sind dabei nicht als äquidistant vorausgesetzt, und es werden kartesische Koordinaten benutzt. Die Zähigkeit $\nu$ ist örtlich veränderlich, aber in jedem einzelnen Kontrollraum konstant.

Die Gleichung zur Bestimmung der v-Komponente lautet (siehe dazu Bild A3.1):

$$K_1^v \cdot v_{i,j-1,k} + K_2^v \cdot v_{i-1,j,k} + K_3^v \cdot v_{i,j+1,k} + K_4^v \cdot v_{i+1,j,k} +$$

$$+ K_p^v \cdot (p_{i,j,k} - p_{i,j-1,k}) + K_5^v = K_6^v \cdot v_{i,j,k}$$

Darin gilt für die Koeffizienten:

$$K_1^v = \Delta x \cdot \frac{\Delta z(i-1) + \Delta z(i)}{4} \cdot \left[ \left| \frac{\nu_{i,j,k-1} + \nu_{i,j-1,k-1}}{\Delta y(j-1) + \Delta y(j-2)} \right| - \right.$$

$$- \left| \frac{v_{i,j,k-1} + v_{i,j-1,k-1}}{4} \right| + \frac{\nu_{i,j,k-1} + \nu_{i,j-1,k-1}}{\Delta y(j-1) + \Delta y(j-2)}$$

$$\left. + \left| \frac{v_{i,j,k-1} + v_{i,j-1,k-1}}{4} \right| + \frac{v_{i,j,k-1} + v_{i,j-1,k-1}}{2} \right]$$

$$K_2^v = \Delta x \cdot \frac{\Delta y(j-1)}{2} \cdot \left| \left| \frac{\nu_{i,j,k-1} + \nu_{i,j-1,k-1}}{2 \cdot \Delta z(i-1)} \right| - \right.$$

$$- \left| \frac{w_{i,j,k-1} + w_{i,j-1,k-1}}{4} \right| + \frac{\nu_{i,j,k-1} + \nu_{i,j-1,k-1}}{2 \cdot \Delta z(i-1)}$$

$$+ \left| \frac{w_{i,j,k-1} + w_{i,j-1,k-1}}{4} \right| - \frac{w_{i,j,k-1} + w_{i,j-1,k-1}}{2} \Bigg]$$

$$K_3^v = \Delta x \cdot \frac{\Delta z(i-1) + \Delta z(i)}{4} \cdot \Bigg[ \left| \frac{\nu_{i,j,k-1} + \nu_{i,j-1,k-1}}{\Delta y(j) + \Delta y(j-1)} \right| -$$

$$- \left| \frac{v_{i,j+1,k-1} + v_{i,j,k-1}}{4} \right| + \frac{\nu_{i,j,k-1} + \nu_{i,j-1,k-1}}{\Delta y(j) + \Delta y(j-1)} +$$

$$+ \left| \frac{v_{i,j+1,k-1} + v_{i,j,k-1}}{4} \right| - \frac{v_{i,j+1,k-1} + v_{i,j,k-1}}{2} \Bigg]$$

$$K_4^v = \Delta x \cdot \frac{\Delta y(j-1)}{2} \cdot \Bigg[ \left| \frac{\nu_{i,j,k-1} + \nu_{i,j-1,k-1}}{2 \cdot \Delta z(i)} \right| -$$

$$- \left| \frac{w_{i+1,j,k-1} + w_{i+1,j-1,k-1}}{4} \right| + \frac{\nu_{i,j,k-1} + \nu_{i,j-1,k-1}}{2 \cdot \Delta z(i)} +$$

$$+ \left| \frac{w_{i+1,j,k-1} + w_{i+1,j-1,k-1}}{4} \right| + \frac{w_{i+1,j,k-1} + w_{i+1,j-1,k-1}}{2} \Bigg]$$

$$K_p^v = - \frac{\Delta z(i-1) + \Delta z(i)}{2 \cdot \rho} \cdot \Delta x$$

$$K_5^v = \frac{u_{i,j,k-1} + u_{i,j-1,k-1}}{2} \cdot v_{i,j,k-1} \cdot \frac{\Delta z(i) + \Delta z(i-1)}{2} \cdot \Delta y(j-1)$$

$$K_6^v = \Delta y(j-1) \cdot \frac{\Delta z(i-1) + \Delta z(i)}{2} \cdot \frac{u_{i,j-1,k-1} + u_{i,j,k-1}}{2} +$$

$$+ K_1^v + K_2^v + K_3^v + K_4^v$$

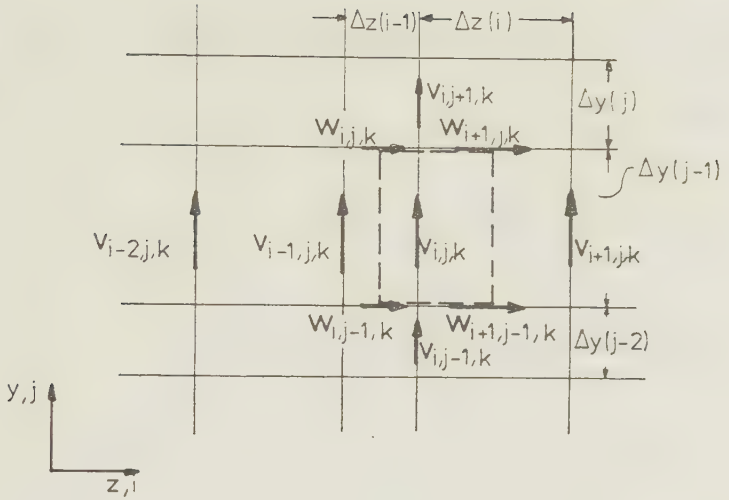



Bild A3.1: Kontrollraum der v-Gleichung

Für die w-Komponente ergibt sich:

$$K_1^w \cdot w_{i,j-1,k} + K_2^w \cdot w_{i-1,j,k} + K_3^w \cdot w_{i,j+1,k} + K_4^w \cdot w_{i+1,j,k} +$$

$$+ K_p^w \cdot (p_{i,j,k} - p_{i-1,j,k}) + K_5^w = K_6^w \cdot w_{i,j,k}$$

mit den Koeffizienten:

$$K_1^w = \Delta x \cdot \frac{\Delta z(i-1)}{2} \cdot \left[ \left| \frac{\nu_{i,j,k-1} + \nu_{i-1,j-k-1}}{2 \cdot \Delta y(j-1)} \right| - \right.$$

$$- \left| \frac{v_{i-1,j,k-1} + v_{i,j,k-1}}{4} \right| + \frac{\nu_{i,j,k-1} + \nu_{i-1,j,k-1}}{2 \cdot \Delta y(j-1)} +$$

$$\left. + \left| \frac{v_{i-1,j,k-1} + v_{i,j,k-1}}{4} \right| + \frac{v_{i-1,j,k-1} + v_{i,j,k-1}}{2} \right]$$

$$K_2^w = \Delta x \cdot \frac{\Delta y(j-1) + \Delta y(j)}{4} \cdot \left[ \left| \frac{v_{i,j,k-1} + v_{i-1,j,k-1}}{\Delta z(i-1) + \Delta z(i-2)} - \right. \right.$$

$$- \left| \frac{w_{i,j,k-1} + w_{i-1,j,k-1}}{4} \right| + \frac{v_{i,j,k-1} + v_{i-1,j,k-1}}{\Delta z(i-1) + \Delta z(i-2)} +$$

$$+ \left| \frac{w_{i,j,k-1} + w_{i-1,j,k-1}}{4} \right| - \left. \frac{w_{i,j,k-1} + w_{i-1,j,k-1}}{2} \right]$$

$$K_3^w = \Delta x \cdot \frac{\Delta z(i-1)}{2} \cdot \left[ \left| \frac{v_{i,j,k-1} + v_{i-1,j,k-1}}{2 \cdot \Delta y(j)} - \right. \right.$$

$$- \left| \frac{v_{i-1,j+1,k-1} + v_{i,j+1,k-1}}{4} \right| + \frac{v_{i,j,k-1} + v_{i-1,j,k-1}}{2 \cdot \Delta y(j)} +$$

$$+ \left| \frac{v_{i-1,j+1,k-1} + v_{i,j+1,k-1}}{4} \right| - \left. \frac{v_{i-1,j+1,k-1} + v_{i,j+1,k-1}}{2} \right]$$

$$K_4^w = \Delta x \cdot \frac{\Delta y(j-1) + \Delta y(j)}{4} \cdot \left[ \left| \frac{v_{i,j,k-1} + v_{i-1,j,k-1}}{\Delta z(i) + \Delta z(i-1)} - \right. \right.$$

$$- \left| \frac{w_{i,j,k-1} + w_{i+1,j,k-1}}{4} \right| + \frac{v_{i,j,k-1} + v_{i-1,j,k-1}}{\Delta z(i) + \Delta z(i-1)} +$$

$$+ \left| \frac{w_{i,j,k-1} + w_{i+1,j,k-1}}{4} \right| + \left. \frac{w_{i,j,k-1} + w_{i+1,j,k-1}}{2} \right]$$

$$K_p^w = - \frac{\Delta y(j-1) + \Delta y(j)}{2} \cdot \Delta x$$

$$K_5^w = \frac{u_{i,j,k-1} + u_{i-1,j,k-1}}{2} \cdot w_{i,j,k-1} \cdot \frac{\Delta y(j) + \Delta y(j-1)}{2} \cdot \Delta z(i-1)$$

$$K_6^w = \Delta z(i-1) \cdot \frac{\Delta y(j-1) + \Delta y(j)}{2} \cdot \frac{u_{i,j,k-1} + u_{i-1,j,k-1}}{2} +$$

$$+ K_1^w + K_2^w + K_3^w + K_4^w$$

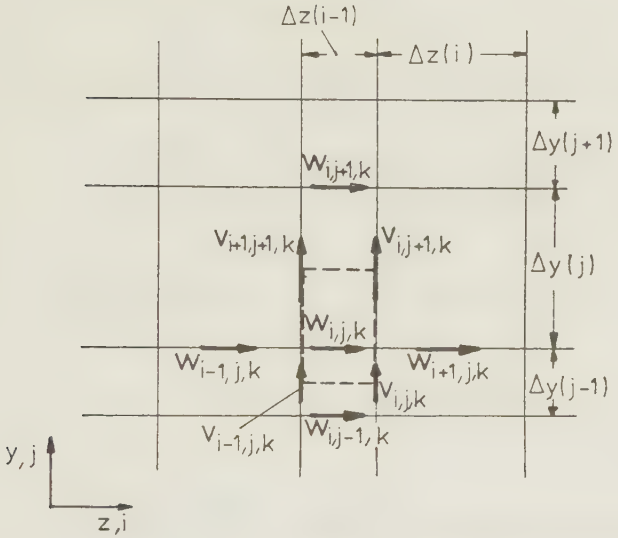



Bild A3.2: Kontrollraum der w-Gleichung

In Durchflußrichtung (x-Richtung) erhält man für die u-Komponente:

$$K_1^u \cdot u_{i,j-1,k} + K_2^u \cdot u_{i-1,j,k} + K_3^u \cdot u_{i,j+1,k} + K_4^u \cdot u_{i+1,j,k} +$$

$$+ K_p^u \cdot (p_{i,j,k+1} - p_{i,j,k}) + K_5^u = K_6^u \cdot u_{i,j,k}$$

Für die Koeffizienten folgt:

$$K_1^u = \Delta x \cdot \frac{\Delta z(i-1) + \Delta z(i)}{4} \cdot \left[ \left| \frac{v_{i,j,k}}{\Delta y(j-1)} - \left| \frac{v_{i,j,k-1}}{2} \right| \right| + \right.$$

$$\left. + \frac{v_{i,j,k}}{\Delta y(j-1)} + \left| \frac{v_{i,j,k-1}}{2} \right| + v_{i,j,k-1} \right]$$

$$K_2^u = \Delta x \cdot \frac{\Delta y(j) + \Delta y(j-1)}{4} \cdot \left[ \left| \frac{v_{i,j,k}}{\Delta z(i-1)} - \left| \frac{w_{i,j,k-1}}{2} \right| \right| + \right.$$

$$\left. + \frac{v_{i,j,k}}{\Delta z(i-1)} + \left| \frac{w_{i,j,k-1}}{2} \right| - w_{i,j,k-1} \right]$$

$$K_3^u = \Delta x \cdot \frac{\Delta z(i-1) + \Delta z(i)}{4} \cdot \left[ \left| \frac{v_{i,j,k}}{\Delta y(j)} - \left| \frac{v_{i,j+1,k-1}}{2} \right| \right| + \right.$$

$$\left. + \frac{v_{i,j,k}}{\Delta y(j)} + \left| \frac{v_{i,j+1,k-1}}{2} \right| - v_{i,j+1,k-1} \right]$$

$$K_4^u = \Delta x \cdot \frac{\Delta y(j) + \Delta y(j-1)}{4} \cdot \left[ \left| \frac{v_{i,j,k}}{\Delta z(i)} - \left| \frac{w_{i+1,j,k-1}}{2} \right| \right| + \right.$$

$$\left. + \frac{v_{i,j,k}}{\Delta \Delta z(i)} + \left| \frac{w_{i+1,j,k-1}}{2} \right| + w_{i+1,j,k-1} \right]$$

$$K_p^u = - \frac{\Delta y(j) + \Delta y(j-1)}{2} \cdot \frac{\Delta z(i) + \Delta z(i-1)}{2 \cdot \rho}$$

$$K_5^u = u_{i,j,k-1}^2 \cdot \frac{\Delta y(j) + \Delta y(j-1)}{2} \cdot \frac{\Delta z(i) + \Delta z(i-1)}{2}$$

$$K_6^u = \frac{\Delta y(j) + \Delta y(j-1)}{2} \cdot \frac{\Delta z(i) + \Delta z(i-1)}{2} \cdot u_{i,j,k-1} +$$

$$+ K_1^u + K_2^u + K_3^u + K_4^u$$

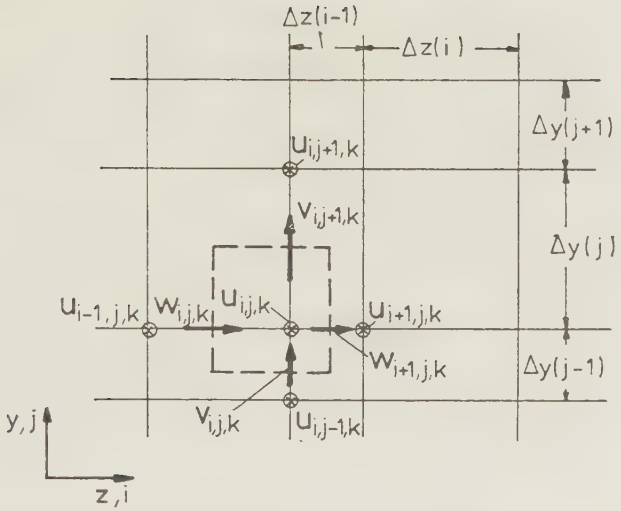



Bild A3.3: Kontrollraum der u-Gleichung

Die aus der Kontinuitätsgleichung abgeleitete Druckkorrekturgleichung hat die Form:

$$B_1 \cdot p'_{i,j-1,k} + B_2 \cdot p'_{i-1,j,k} + B_3 \cdot p'_{i,j+1,k} + B_4 \cdot p'_{i+1,j,k} +$$

$$+ C = B_5 \cdot p'_{i,j,k}$$

mit den Koeffizienten:

$$B_1 = \Delta x^2 \cdot \frac{(\Delta z(i) + \Delta z(i-1))^2}{4} \cdot \frac{1}{z \cdot K_6^V(i,j,k)}$$

$$B_2 = \Delta x^2 \cdot \frac{(\Delta y(j) + \Delta y(j-1))^2}{4} \cdot \frac{1}{\rho \cdot K_6^w(i,j,k)}$$

$$B_3 = \Delta x^2 \cdot \frac{(\Delta z(i) + \Delta z(i-1))^2}{4} \cdot \frac{1}{\rho \, K_6^v(i,j+1,k)}$$

$$B_4 = \Delta x^2 \cdot \frac{(\Delta y(j) + \Delta y(j-1))^2}{4} \cdot \frac{1}{\rho \cdot K_6^w(i+1,j,k)}$$

$$B_5 = \left[\frac{\Delta y(j) + \Delta y(j-1)}{2} \cdot \frac{\Delta z(i) + \Delta z(i-1)}{2}\right]^2 \cdot \frac{1}{\rho \cdot K_6^u(i,j,k)} +$$

$$+ B_1 + B_2 + B_3 + B_4$$

$$C = \dot{V}(i,j) = \frac{\Delta y(j) + \Delta y(j-1)}{2} \cdot \frac{\Delta z(i) + \Delta z(i-1)}{2} (u_{i,j,k} - u_{i,j,k-1}) +$$

$$+ \Delta x \cdot \frac{\Delta y(j) + \Delta y(j-1)}{2} \cdot (w_{i+1,j,k} - w_{i,j,k}) +$$

$$+ \Delta x \cdot \frac{\Delta z(i) + \Delta z(i-1)}{2} \cdot (v_{i,j+1,k} - v_{i,j,k})$$

## Anhang A4: Zwei weitere Beispiele zur Krümmerströmung

Im Laufe der Entwicklung des in dieser Arbeit vorgestellten Programmsystems sind neben den bereits beschriebenen Rechnungen zwei weitere Beispiele betrachtet worden, die der Vollständigkeit halber hier aufgeführt werden sollen. Beide Rechnungen sind noch ohne Turbulenzmodell durchgeführt worden. Außerdem war die Randbedingung der periodischen Wiederholung, wie sie in der endgültigen späteren Programmform verwendet wird, noch durch die Haftbedingung ersetzt. Es handelt sich also um geschlossene Kanäle, die in einem Toruskoordinatensystem mit $\varphi$ als Durchflußkoordinate (A4.1) bzw. in einem Zylinderkoordinatensystem (A4.2) dargestellt werden. Im ersten Fall handelt es sich somit um einen Krümmer mit Kreisquerschnitt, im zweiten Fall um einen Krümmer mit Rechteckquerschnitt.

### A4.1: Nachrechnung der Versuche von Detra

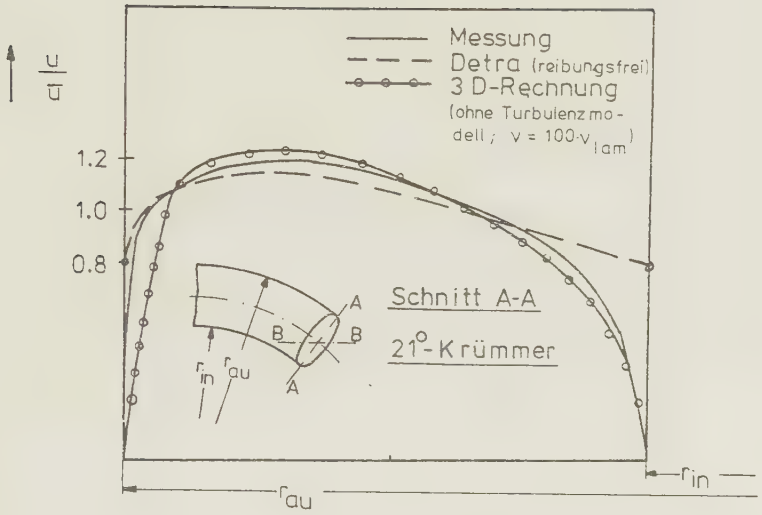
In diesem Abschnitt wird die Nachrechnung der 1953 von Detra /6/ an Rohrkrümmern mit Kreisquerschnitt durchgeführten Untersuchungen beschrieben. Wie oben erwähnt, ist das Rechenmodell noch ohne Turbulenzmodell eingesetzt worden. Die Rechnungen zeigen, daß die von Detra betrachtete voll turbulente Rohrströmung ($Re = 2.56 \cdot 10^5$) teilweise mit einem laminaren Ansatz beschrieben werden kann, wenn der Wert der laminaren Zähigkeit verändert wird. Außerdem verdeutlichen sie den Einfluß der Reibungsterme.

Ziel der Untersuchungen von Detra war die experimentelle Überprüfung seines Verfahrens zur Berechnung von Sekundärströmungen in gekrümmten Kanälen. Die Rechenmethode beruht auf einer Potenzreihenlösung der stark vereinfachten Navier-

Stokes-Gleichungen. Detra geht davon aus, daß die Geschwindigkeit auf einer Stromlinie immer konstant bleibt (Reibungsfreiheit, gleichbleibender Querschnitt) und macht einen Ansatz für zwei Querströmungskomponenten, die sich der Hauptströmung als Störung überlagern und das Geschwindigkeitsprofil verzerren. Dabei gehorchen die Querströmungen einer zweidimensionalen Potentialgleichung und müssen klein gegen die Hauptströmung sein. Eine wichtige Einschränkung ist außerdem, daß die Gleichungen unter der Voraussetzung kleiner Umlenkwinkel abgeleitet sind. Aus diesem Grund haben die von Detra untersuchten Rohrkrümmer Umlenkungen von nur $21^{\circ}$ bzw. $42^{\circ}$. Bei diesen Krümmern bestimmt er durch Messungen die Geschwindigkeitsverteilungen am Austritt und führt für den $21^{\circ}$- Krümmer auch Rechnungen durch. Das Strömungsmedium ist dabei Luft.

Die Versuche von Detra sind mit dem dreidimensionalen Verfahren nachgerechnet worden. Die Rechnung berücksichtigt im Gegensatz zu Detra's Methode die Reibungsterme. Die infolge der Turbulenz scheinbar erhöhte Viskosität ist dadurch berücksichtigt worden, daß die Rechnungen nicht mit einem festen Stoffwert für die Zähigkeit $\nu_{lam}$, sondern auch mit verschiedenen (jeweils konstanten) Zähigkeiten $\nu > \nu_{lam}$ durchgeführt worden sind. Dabei zeigte sich, daß die Rechnungen mit $\nu > \nu_{lam}$ wesentlich besser den Messungen entsprechen.

Im Bild A4.1 sind beide Rechenverfahren und die Messung für die $21^{\circ}$- Umlenkung gegenübergestellt. Die Geschwindigkeitsprofile sind auf den Mittellinien in Richtung des Krümmungsradius (oberes Bild) bzw. senkrecht zum Krümmungsradius des Rohres (unteres Bild) aufgenommen worden. Die dreidimensionale Rechnung ist mit einer dem Programm vorgegebenen Zähigkeit von $\nu = 100 \cdot \nu_{lam}$ durchgeführt worden. Beide Rechenverfahren liefern gute Ergebnisse. Da Detra's Rechnung reibungsfrei ist, kann er die Haftbedingung an den Kanalwänden nicht erfüllen, sondern verwendet als Randbedin-



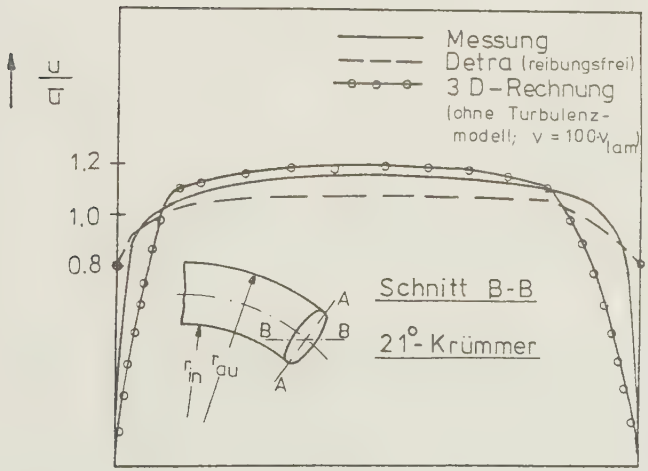




Bild A4.1: Geschwindigkeitsprofile am Austritt des 21°- Krümmers

gung die Vorgabe eines Wertes von $u_{Rand} = 0.8 \cdot \bar{u}$, wobei $\bar{u}$ die kontinuitätsgemittelte Durchschnittsgeschwindigkeit ist.

Für den $42^{\circ}$- Krümmer gibt Detra keine Rechenergebnisse mehr an, da diese Umlenkung schon zu stark ist, um die Voraussetzungen seines Verfahrens zu erfüllen. Eine andere Rechnung von ihm, die bis zu einer Umlenkung von $28^{\circ}$ führt, zeigt, daß brauchbare Ergebnisse mit seiner Methode nicht wesentlich über $21^{\circ}$ hinaus zu erwarten sind. Die Verzerrung des Profils durch die Sekundärströmungen wird dann von der Rechnung übertrieben. Dies ist unter anderem eine Folge der nur zweidimensionalen Erfüllung der Kontinuitätsgleichung in den Querströmungsebenen. Die Massenbilanz

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

wird bei Detra so erfüllt, daß

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

und

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

getrennt voneinander gilt. Dadurch ist die Wechselwirkung zwischen Haupt- und Querströmung offenbar nicht realistisch genug für größere Umlenkwinkel beschrieben.

Da das 3D-Verfahren keiner Einschränkung bezüglich des Umlenkwinkels unterliegt, ist auch die Messung am $42^{\circ}$- Krümmer nachgerechnet worden. Bild A4.2 zeigt das Ergebnis. Die rechnerische Zähigkeit beträgt wieder $\nu = 100 \cdot \nu_{lam}$. Auch hier zeigt sich gute Übereinstimmung, besonders im Kernbereich der Strömung.

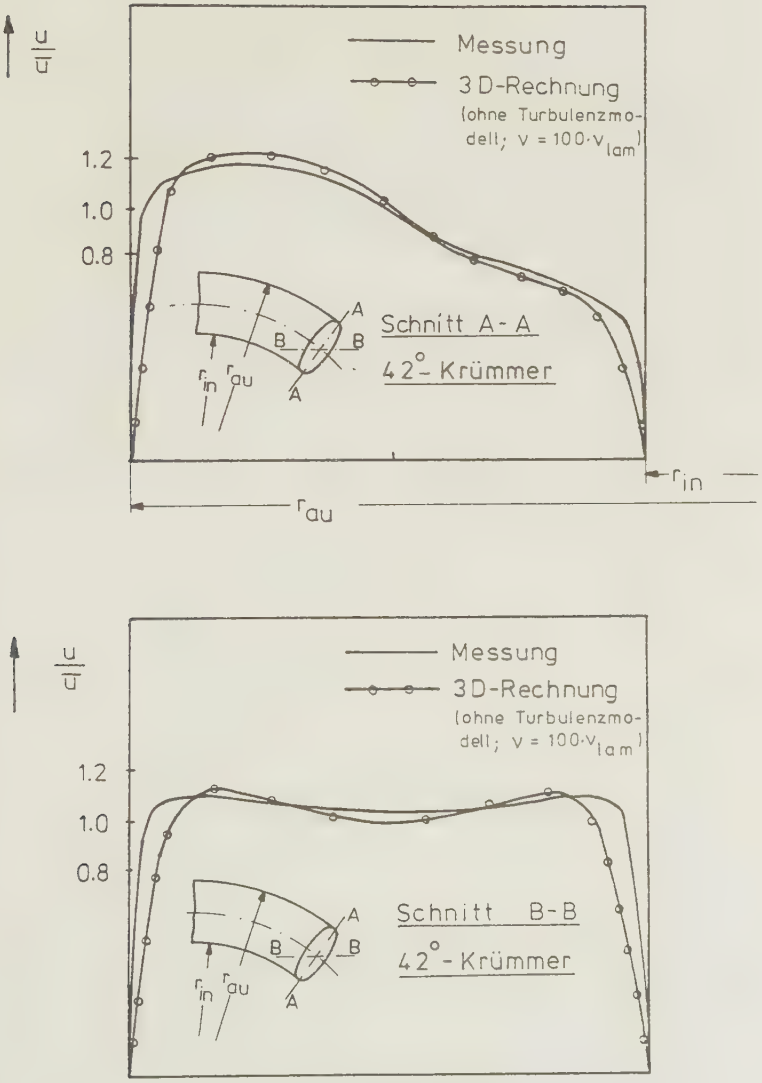



Bild A4.2: Geschwindigkeitsprofile am Austritt des 42°- Krümmers

Um den Einfluß der (konstanten) Zähigkeit auf die Rechnung darzustellen, sind in Bild A4.3 neben den bereits im Vergleich zu den Messungen betrachteten Rechnungen mit $\nu = 100 \cdot \nu_{lam}$ weitere Rechnungen mit $\nu = 50 \cdot \nu_{lam}$ und $\nu = \nu_{lam}$ sowohl für den $21^{o}$- Krümmer als auch für den $42^{o}$-Krümmer aufgetragen. Mit steigender Zähigkeit werden die Geschwindigkeitsgradienten am Rand kleiner, das Maximum der Geschwindigkeit immer höher. Betrachtet man die Reynoldszahlen $Re = \bar{u} \cdot D/\nu$ dieser Rechnungen, so sieht man, daß sie sich umgekehrt proportional zur vorgegebenen Zähigkeit verhalten, weil $\bar{u}$ und D in allen Rechnungen gleich sind. Die Strömung gelangt bei steigender Zähigkeit in den Bereich kleinerer Reynoldszahlen. Der sich hier ergebende Widerspruch, daß durch die höhere Zähigkeit gerade dem turbulenten Charakter der Strömung Rechnung getragen werden soll, ist nur durch ein geeignetes Turbulenzmodell zu lösen, das im Gegensatz zu dem hier verwendeten Ansatz mit $\nu$ = const die Zähigkeit an jedem Punkt in Abhängigkeit von anderen Größen der Strömungsfeldes bestimmt.

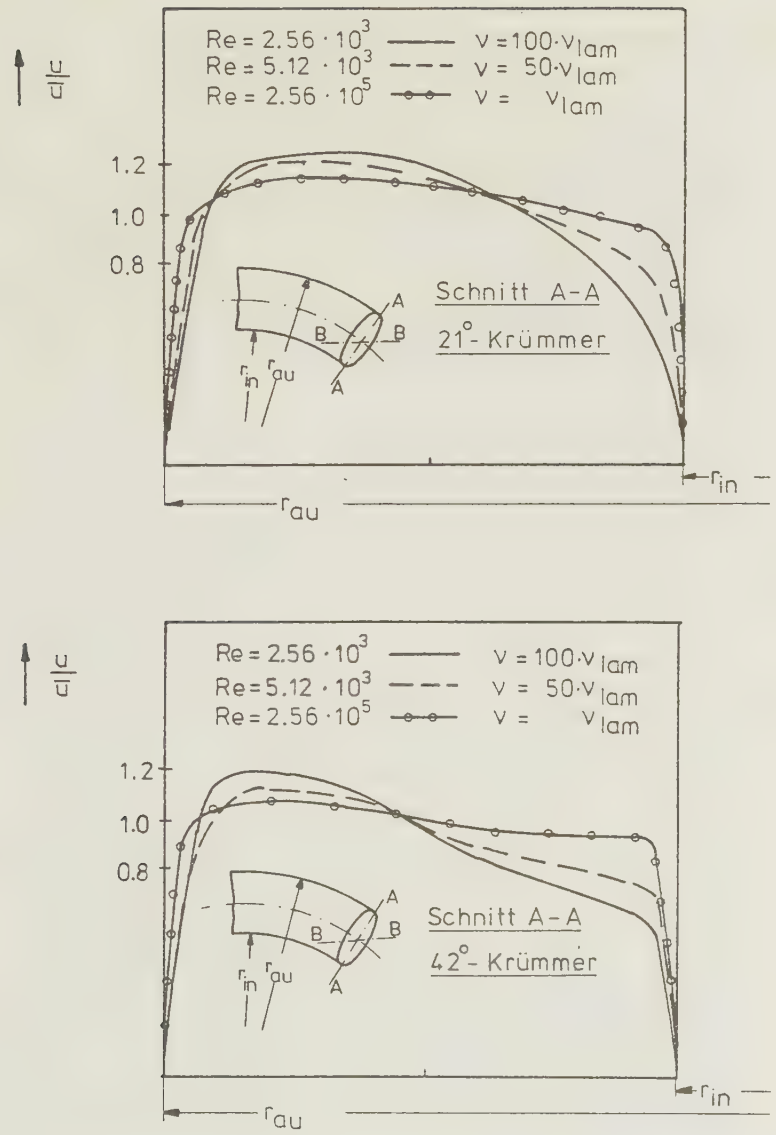



Bild A4.3: Einfluß der Viskosität des Strömungsmediums auf das Geschwindigkeitsprofil

## A4.2: Die Entwicklung von Sekundärwirbeln in einem Krümmer mit quadratischem Querschnitt

Bei der Durchströmung eines gekrümmten Kanals entsteht durch die Wirkung der Zentrifugalkräfte eine Sekundärströmung. Diese ist, wenn sich das Geschwindigkeitsmaximum in Kanalmitte befindet, in der Mitte des Kanals zum Außenrand der Krümmung hin gerichtet. In den energiearmen Randbereichen stellt sich dann eine zum Innenrand der Krümmung gerichtete Ausgleichsbewegung ein. Auf diese Weise entsteht ein Doppelwirbel, dessen Drehachsen in der Durchflußrichtung liegen.

Die Entstehung solcher Wirbel ist an einem Kanal mit quadratischem Querschnitt untersucht worden. Dazu wird die Strömung in einem $125^{\circ}$- Krümmer mit einem Querschnitt von 0,1m x 0,1m und einem Krümmungsradius von 0,8m berechnet. Am Eintritt wird eine Geschwindigkeit von $\bar{u}$ = 7m/s konstant über den Querschnitt vorgegeben. Nun wird die Entwicklung der Sekundärgeschwindigkeiten und des Hauptströmungsprofils betrachtet. Für fünf Querströmungsebenen im Bereich von $10^{\circ}$ bis $50^{\circ}$ Umlenkung sind in Bild A4.4 Plots der berechneten Sekundärgeschwindigkeiten als Pfeildiagramme abgebildet. Die Pfeile geben Richtung und Größe der jeweils vorhandenen Quergeschwindigkeit an. Bei diesen Bildern ist zu beachten, daß der Maßstab, der die Länge eines Pfeils zu einer bestimmten Geschwindigkeit in Beziehung setzt, jeweils unterschiedlich ist. Die einzelnen Abbildungen sind so normiert, daß die jeweils auftretende größte Pfeillänge in allen Bildern gleich ist. Diese Art der Darstellung ist gewählt worden, um den Effekt der sich schnell vergrößernden Sekundärgeschwindigkeiten auszugleichen, da sonst für eine günstige Darstellung teilweise zu große bzw. zu kleine Pfeile auftreten würden.

Aus den Zeichnungen in Bild A4.4 ist die Entwicklung der

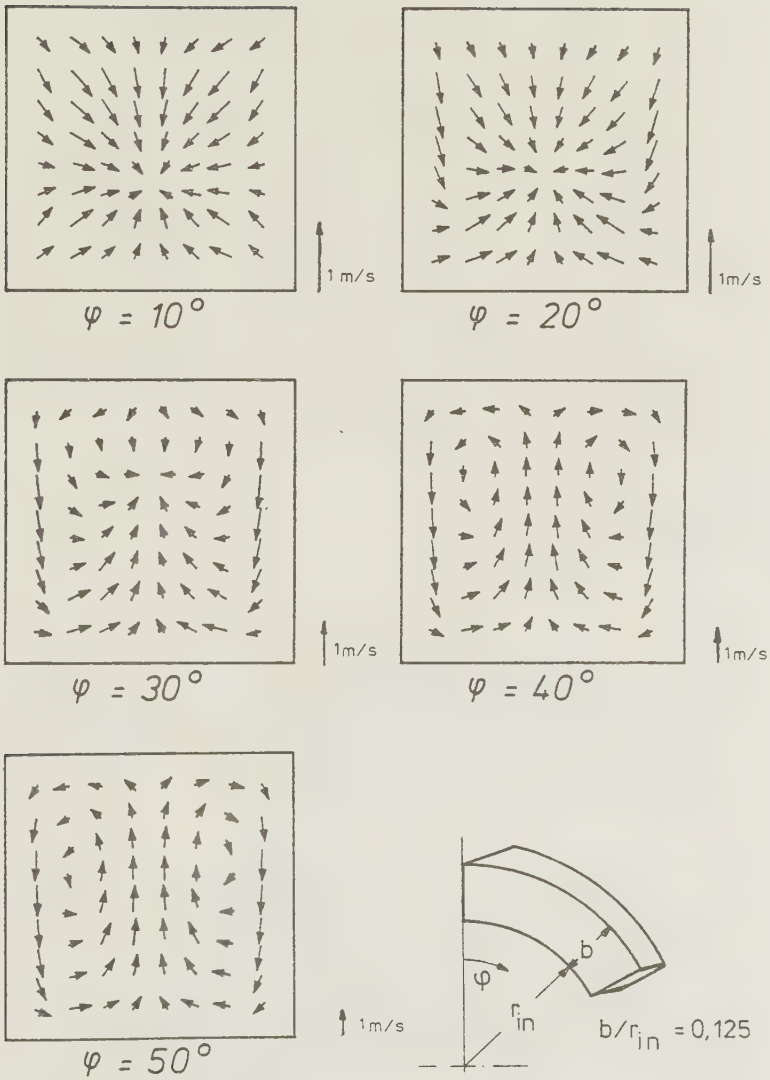
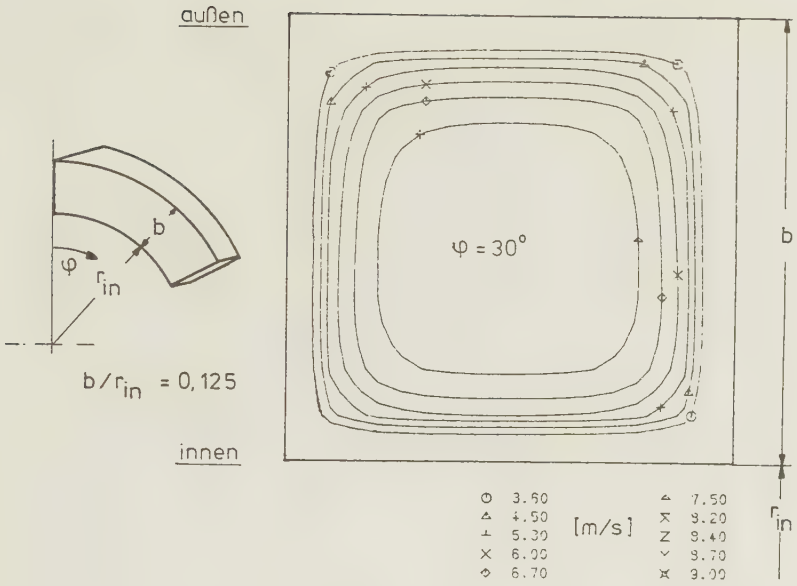



Bild A4.4: Entstehung von Sekundärwirbeln im Krümmer

Strömung erkennbar: da eine über den Querschnitt konstante Eintrittsgeschwindigkeit vorgegeben worden ist, findet zunächst eine Querströmung zur Mitte des Kanals hin statt, um ein Geschwindigkeitsmaximum aufzubauen. Die Strömung entwickelt sich also zunächst so, daß die Geschwindigkeit an den Rändern verzögert wird und im mittleren Bereich zunimmt. Da die durch die Krümmung hervorgerufenen, nach außen gerichteten Zentrifugalkräfte auf den schnelleren Teil der Strömung stärkeren Einfluß haben als auf die energieärmeren Randzonen, wird der schnellere Kernbereich nun zunehmend nach außen verlagert. Entsprechend der Kontinuitätsbedingung strömt von der Innenseite energieärmeres Material nach, das nun im Kernbereich der Strömung beschleunigt wird und dann ebenfalls an den Außenrand wandert. Vom Außenrand her findet der aus Kontinuitätsgründen erforderliche Ausgleichstransport von Material in den energieärmeren Randbereichen statt und ist zurück zum Innenrand der Krümmung gerichtet. Auf diese Weise entsteht eine ständige Querbewegung des Fluids. Immer neues Material kommt vom Innenradius in den Kernbereich, wird dort beschleunigt und dann aufgrund der Zentrifugalkräfte nach außen bewegt. Nachdem sich der Doppelwirbel, der in der letzten Abbildung von Bild A4.4 ($50^{\circ}$ Umlenkung) zu sehen ist, ausgebildet hat, verändert sich das Querströmungsbild qualitativ nicht mehr. Die Sekundärgeschwindigkeiten nehmen jedoch im weiteren Bereich der Krümmung noch betragsmäßig zu.

Die Bilder A4.5 bis A4.7 beschreiben parallel den Einfluß dieses Prozesses auf die Hauptströmungskomponente in Isotachendiagrammen. Der Ausbildung eines Maximums folgt die Verlagerung der schnellen Kernströmung nach außen. Dabei wird das Maximum von der Innenseite des Kanals her immer mehr eingeschnürt. Am Außenrand des Krümmers entsteht ein Gebiet mit hohen Geschwindigkeitsgradienten, in dem die schnellen Fluidteilchen ständig abgebremst werden, um dann



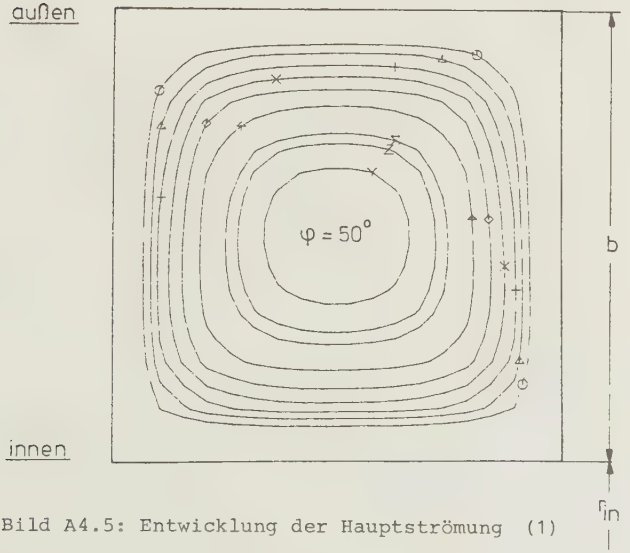




Bild A4.5: Entwicklung der Hauptströmung (1)

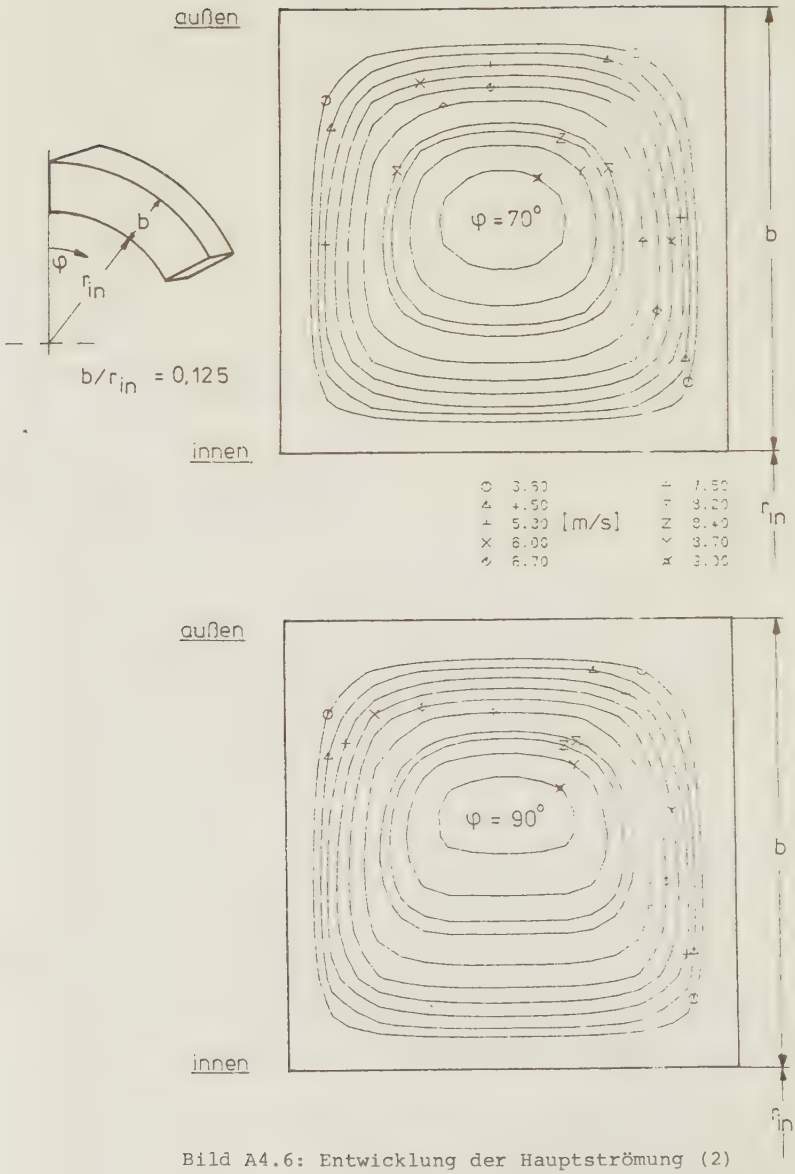



Bild A4.6: Entwicklung der Hauptströmung (2)

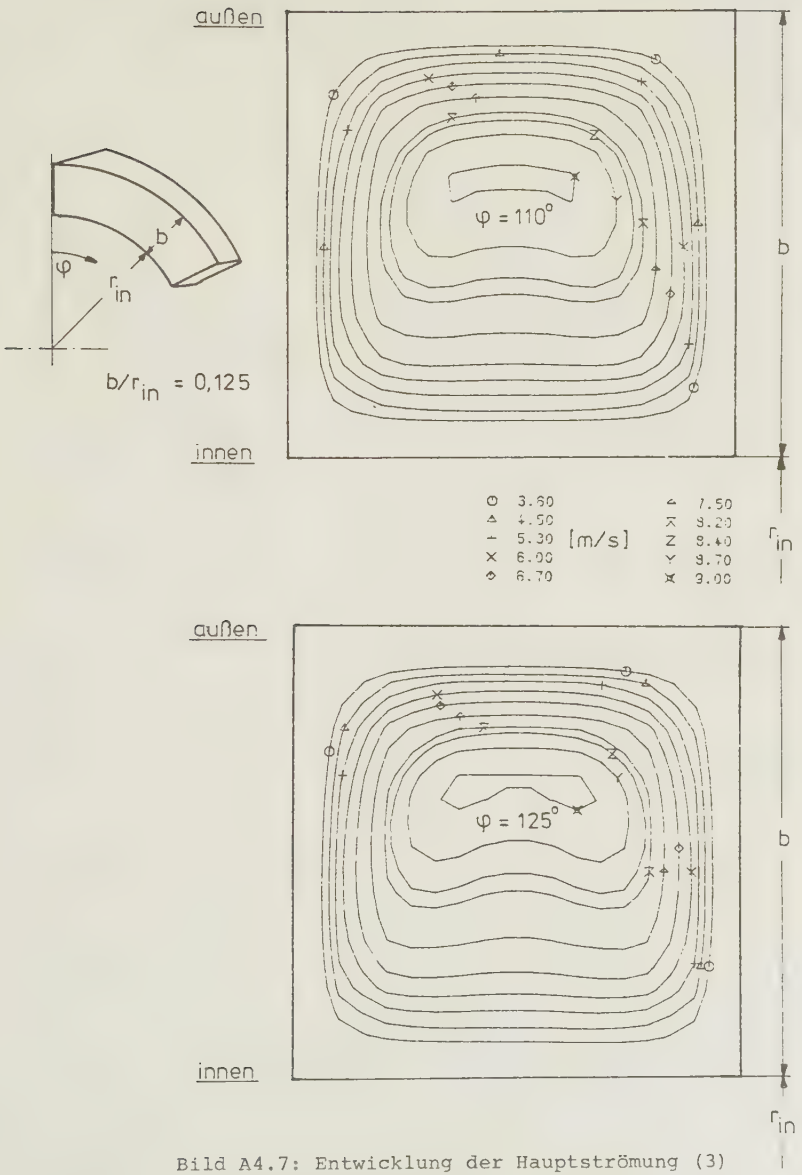



Bild A4.7: Entwicklung der Hauptströmung (3)

in den Randbereichen wieder zum Innenrand der Krümmung zurückzuwandern. Durch die ständige Beschleunigung und Verzögerung von Fluidteilchen sind auch die bei einer Krümmerströmung im Vergleich zu einer geraden Kanalströmung höheren Verluste zu erklären.

Literaturverzeichnis


/1/ Gruber, H. — Strömungen in Rückführkanälen von mehrstufigen Radialverdichtern. Dissertation Ruhr-Universität Bochum (1973)

/2/ Rodi,W. McGuirk,J. Leschziner,M. Rastogi,A.K. — Veröffentlichungen des Hochschulkurses „Numerische Berechnung turbulenter Strömungen in Forschung und Praxis" 2. bis 4.10. 1979, Karlsruhe

/3/ Pratap, S.V. Spalding, D.B. — Fluid Flow and Heat Transfer in Three-Dimensional Duct Flow. Int. J. of Heat and Mass Transfer, Vol. 19, pp. 1183-1188 (1976)

/4/ Patankar, S.V. Spalding, D.B. — A Calculation Procedure for Heat, Mass and Momentum Transfer in Three-Dimensional Parabolic Flows. Int. J. of Heat and Mass Transfer, Vol. 15, pp. 1787-1808 (1972)

/5/ Fister, W. — Skripten zu den Vorlesungen „Grundzüge der Fluidenergiemaschinen" und „Strömungsmaschinen". Ruhr-Universität Bochum (1978)

/6/ Detra, R.W. — The Secondary Flow in Curved Pipes. Dissertation ETH Zürich (1953)

/7/ Schulz B. — Reibungsbehaftete stationäre Strömungen in axialsymmetrischen Kanälen beliebiger Form. Dissertation Universität Stuttgart (1979)

/8/ Schlichting, H.
Grenzschichttheorie.
5. erweiterte Auflage, Verlag Braun, Karlsruhe (1965)

/9/ Briley, W.R.
McDonald, H.
Solution of the Multidimensional Compressible Navier-Stokes-Equations by a Generalized Implicit Method.
J. of Computational Physics, pp. 372-397, (1977)

/10/ Bourne, D.E.
Kendall, P.C.
Vektoranalysis.
Verlag Teubner, Stuttgart (1973)

/11/ Jordan-Engeln, G.
Reutter, F.
Numerische Mathematik für Ingenieure.
BI-Hochschultaschenbücher, Mannheim (1978)

/12/ Bronstein, I.N.
Semendjajew, K.A.
Taschenbuch der Mathematik.
Verlag Teubner, Leipzig (1974)

/13/ Valentiner, S.
Vektoren und Matrizen.
Sammlung Göschen, Berlin (1967)

/14/ Marsal, D.
Die numerische Lösung partieller Differentialgleichungen.
BI-Wissenschaftsverlag, Hannover (1975)

/15/ Gersten, K.
Einführung in die Strömungsmechanik.
Verlagsgruppe Bertelsmann, Düsseldorf (1974)

/16/ Huebner, K.H.
The Finite Element Method for Engineers.
Wiley-Interscience Publication, USA (1975)

/17/ Siverding, C.
et. al.
Application of Numerical Methods to Flow Calculations in Turbomachines.
Lecture Series at v. Karman Institute for Fluid Dynamics, 23-27 April, Bruxelles, (1979)

/18/ Hood,P.
Taylor, C.
A Numerical Solution of the Navier-Stokes-Equations Using the Finite Element Technique.
Computer&Fluids, Vol. 1, pp. 73-100, Pergamon Press, Great Britain (1973)

/19/ Rodi, W.
Spalding, D.B.
A Two Parameter Model of Turbulence and its Application to Free Jets.
Wärme- und Stoffübertragung, Bd. 3, S. 85-95, (1970)

/20/ Deardorff, J.W.
A Numerical Study of three-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds-numbers.
J. of Fluid Mech., Vol. 41, pp. 453-480, (1970)

/21/ Launder, B.E.
Spalding, D.B.
The Numerical Computation of Turbulent Flows.
Computer Meth. in Applied Mech. and Eng. Vol. 3, pp. 269-289, (1974)

/22/ Jones, W.P.
Launder, B.E.
The Prediction of Laminarization with a two-equation Model of Turbulence.
Int. J. of Heat and Mass Transfer, Vol. 15, pp. 301-314, (1972)

/23/ Hanjalic, K.
Launder, B.E.
A Reynolds stress model of Turbulence and its Application to Thin Shear Flows.
J. of Fluid Mech., Vol. 52, pp. 609-638, (1972)

/24/ Schumann, U.
Subgrid Scale Model for Finite Difference Simulations of Turbulent Flows in Plane Channels and Annulli.
J. of Comp. Phys., Vol. 18, pp. 376-404, (1975)

/25/ Launder, B.E.
Reece, G.J.
Rodi, W.
Progress in the Development of a Reynolds-stress Turbulence Closure.
J. of Fluid Mech., Vol. 68, pp. 537-566, (1975)

/26/ Mori, Y.
Nakayama, W.
Study on Forced Convective Heat Transfer in Curved Pipes.
Int. J. of Heat and Mass Transfer, Vol. 10, pp. 37-59, (1967)

/27/ Briley, W.R.
Numerical Method for Predicting Three-Dimensional Steady Viscous Flow in Ducts.
J. of Comp. Phys., Vol. 14, pp. 8-28, (1974)

/28/ Forester, C.K.
Numerical Prediction of Compressible Potential Flow for Arbitrary Geometries.
presented at the Winter Annual Meeting of the ASME, New York, December 2-7, (1979)

/29/ Roberts, D.W.
Forester, C.K.
Numerical Prediction of Three-Dimensional subsonic Diffusor Flow.
presented at the Winter Annual Meeting of the ASME, New York, December 2-7, (1979)

/30/ Japikse, D.
Review: Progress in Numerical Turbomachinery Analysis.
J. of Fluid Eng., Vol. 98, pp. 592-606, (1976)

/31/ Roberts, D.W.
Forester, C.K.
Parabolic Procedure for Flows in ducts with Arbitrary Cross Sections.
AIAA Journal, Vol. 17, No.1, pp. 33-40, (1979)

/32/ Laskaris, T.E.
Finite- Element Analysis of Three- Dimensional Potential Flow in Turbomachines.
AIAA Journal, Vol. 16, No.7, pp. 717-722, (1978)

/33/ Rowe, M.
Measurements and Computations of Flow in Pipe Bends.
J. Fluid Mech., Vol. 43, pp. 771-783, (1970)

/34/ Squire, H.B.
Winter, K.G.
The Secondary Flow in a Cascade of Airfoils in a Nonuniform Stream.
J. of the Aeronautical Sciences, pp. 271-277, (1951)

/35/ Mori, Y.
Fukada, T.
Nakayama, W.
Convective Heat Transfer in a Rotating Radial Circular Pipe.
Int. J. of Heat and Mass Transfer, Vol. 14, pp. 1807-1824, (1971)

/36/ Mori, Y.
Uchida, Y.
Ukon, T.
Forced Convective Heat Transfer in a Curved Channel with a Square Cross Section.
Int. J. of Heat and Mass Transfer, Vol. 14, pp. 1787-1805, (1971)

/37/ Ghia, K.N.
Sokhey, J.S.
Laminar Incompressible Viscous Flow in Curved Ducts of Regular Cross-Sections.
J. of Fluids Eng., pp. 640- 648, (1977)

/38/ Cheng, K.C.
Lin, R.C.
Ou, J.W.
Fully Developed Laminar Flow in Curved Rectangular Channels.
J. of Fluid Eng., pp. 41-48, (1976)

/39/ Patankar, S.V.
Pratap, V.S.
Spalding, D.B.
Prediction of Turbulent Flow in Curved Pipes.
J. of Fluid Mech., Vol. 67, pp. 583-595, (1975)

/40/ Patankar, S.V.
Pratap, V.S.
Spalding, D.B.
Prediction of Laminar Flow and Heat Transfer in Helically Coiled Pipes.
J. of Fluid Mech., Vol. 62, pp. 539-551, (1974)

/41/ Majumdar, A.K.
Spalding, D.B.
Numerical Computation of Three-Dimensional Flows in a Rotating Curved Passage.
Proceedings of the 1st International Conference on Centrifugal Compressor Technology, Madras, India, February 20-23, (1978)

/42/ Pratap. V.S.
Spalding, D.B.
Numerical Computations of the Flow in Curved Ducts.
Aeronautical Quarterly, pp. 219-228,(1975)

/43/ Majumdar, A.K.
Pratap, V.S.
Spalding, D.B.
Numerical Computation of Flow in Rotating Ducts.
J. of Fluids Eng., pp. 148-153, (1977)

/44/ Beavers, G.S.
Sparrow, E.M.
Magnuson, R.A.
Experiments on Hydrodynamically developing Flow in Rectangular Ducts of Arbitrary Aspect Ratio.
Int. J. of Heat and Mass Transfer, Vol. 13, pp. 689-702, (1970)

/45/ Barua, S.N.
On Secondary Flow in Staionary Curved Pipes.
Quarterly Journal of Mech. and Appl. Math., Vol. 16, pp. 61-76, (1963)

/46/ Baylis, J.A.
Experiments on Laminar Flow in Curved Channels of Square Section.
J. Fluid Mech., Vol. 48, pp. 417-422 (1971)

/47/ Keck. H.
Finite-Elemente-Berechnung von Strömungen in hydraulischen Strömungsmaschinen.
Escher-Wyss-Mitteilungen, S. 92-100 (1980)

/48/ Tognola, S.
Berechnung der turbulenten Strömung im Spalt mit bewegter Wand.
Escher-Wyss-Mitteilungen, S. 26-32, (1980)

/49/ Moore, J.
Moore, J.G.
A Calculation Procedure for Three-Dimensional, Viscous, Compressible Duct Flow.
Part I - Inviscid Flow Considerations.
ASME-publication, Paper No. 79-WA/FE-4 (1979)

/50/ Moore, J.
Moore, J.G.
A Calculation Procedure for Three-Dimensional, Viscous, Compressible Duct Flow.
Part II - Stagnation Pressure Losses in a Rectangular elbow.
ASME-paper No. 79-WA/FE-5 (1979)

/51/ Moore, J.
Moore, J.G.
Calculations of Three- Dimensional Viscous Flow and Wake Development in a Centrifugal Impeller.
Presented at ASME Gas Turbine Conference New Orleans, (1980)

/52/ Johnson, M.W.
Moore, J.
The Development of Wake Flow in a Centrifugal Impeller.
ASME-paper No. 79-GT-152, (1979)

/53/ Rotta, J.C.
Turbulente Strömungen.
Verlag Teubner, Stuttgart (1972)

/54/ Wu, C.H.
A General Theory of Three-Dimensional Flow in Subsonic and Supersonic Turbomachines of Axial-, Radial-, and Mixed-Flow-Type.
NACA TIN 2604 (1952)

/55/ Schreckenberg, H.
Ein Beitrag zur Berechnung der Quasi-Dreidimensionalen Relativströmung radialer Verdichterräder.
Dissertation Ruhr-Universität Bochum (1974)

/56/ Katsanis, T.
Computer Program for Calculating Velocities and Streamlines on a Blade-to-Blade Stream Surface of a Turbomachine.
NASA TN D-4525 (1968)

/57/ Hirsch, C.H.
Warzee, G.
A Finite Element Method for Through-Flow Calculations in Turbomachines.
ASME-paper 76-FE-12 (1976)

/58/ Marsh, H.
A Digital Computer Program for the Through-Flow Fluid Mechanics in an arbitrary Turbomachine using a Matrix Method.
Aeronautical Research Council Report and Memorandum No. 3509 (1968)

/59/ Spalding, D.B.
Patankar, S.V.
Heat and Mass Transfer in Boundary Layers.
2nd edition, Intertext Books, London (1970)

/60/ Bradshaw, P.
(publisher)
Turbulence.
Topics in Applied Physics, Vol. 12, Springer-Verlag (1976)

/61/ Eck, B.
Technische Strömungslehre.
8. Ausgabe, Springer-Verlag, (1978)

/62/ Bradshaw, P.
An Introduction to Turbulence and its Measurement.
Imperial College, London, Pergamon Press (1971)

/63/ Schodl. R.
Entwicklung eines Laser-Zwei-Fokus-Verfahrens für die berührungslose Messung der Strömungsvektoren, insbesondere in Turbomaschinen.
DFVLR, Institut für Luftstrahlantriebe, Köln (1977)

/64/ Rodi, W.
Turbulence Models and their Application in Hydraulics.
IAHR-Paper, Delft, (1980)

/65/ Fister, W.
Zahn, G.
Adrian, F.W.
Theoretische und experimentelle Untersuchungen an Rückführkanälen hydraulischer Strömungsmaschinen.
VDI-Bericht 424, VDI-Verlag, Düsseldorf (1981)

/66/ Schröder, D.
Erstellung eines Koordinatenplans für die 5-Achsen-Traversiereinrichtung des L2F-Gerätes zur Messung von örtlichen Geschwindigkeiten im Kreislauf eines hydrodynamischen Wandlers.
Unveröffentlichte Diplomarbeit am Lehrstuhl für Fluidenergiemaschinen, Ruhr-Universität Bochum (1981)

/67/ Jeske, H.O. Theoretische Untersuchungen zur transsonischen Strömung in beschaufelten Leiträdern von Radialverdichtern. Vortrag im Kolloquium Fluidenergiemaschinen und -anlagen, Dez. 1981, Ruhr-Universität Bochum (unveröffentlicht)

/68/ Brauer, H. Grundlagen der Einphasen- und Mehrphasenströmungen. Verlag Sauerländer, Aarau (Schweiz), 1971

/69/ Ito, H. Pressure losses in smooth pipe bends. Transactions ASME, Ser. D., Journ. Basic Eng., 82 (1960) 3, pp. 131-143

# L e b e n s l a u f

| | |
|---|---|
| 20. Februar 1954 | geboren in Essen-Kettwig |
| 1960 - 1964 | Besuch der ev. Volksschule in Essen-Kettwig |
| 1964 - 1972 | Besuch des neusprachlichen Zweiges des Theodor-Heuss-Gymnasiums in Essen-Kettwig |
| 1972 - 1977 | Studium des allgemeinen Maschinenbaus an der Ruhr-Universität Bochum; Studienschwerpunkte: Steuerungs- und Regelungstechnik, Strömungsmaschinen |
| während des Studiums | Fachpraktika bei der Kraftwerk-Union (Werk Mülheim) und beim Rheinisch-Westfälischen Elektrizitätswerk (Abteilung Kraftwerke, Essen) |
| seit April 1977 | Wissenschaftlicher Assistent an der Ruhr-Universität Bochum, Institut für Energietechnik, Lehrstuhl für Fluidenergiemaschinen (Prof. Dr.-Ing. W. Fister) |